В.Ф. ПАНОВ

МАТЕМАТИКА
ДРЕВНЯЯ И ЮНАЯ

Под редакцией д-ра техн. наук,
проф. В.С. Зарубина

Издание второе, исправленное

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2006

УДК 51
ББК 22.1
П16

Р е ц е н з е н т ы:

В.В. Блаженков — зав. кафедрой высшей математики Военной академии ракетных войск стратегического назначения им. Петра Великого, д-р техн. наук, проф.;
С.Г. Шеховцов — директор Центра развития новой университетской образовательной модели Российского государственного гуманитарного университета.

Панов В.Ф.

П16 Математика древняя и юная / Под ред. В.С. Зарубина. — 2-е изд., — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. — 648 с.: ил.
ISBN 5-7038-2206-8

Книга является дополнением к комплексу учебников серии «Математика в техническом университете» и знакомит читателя с основными фрагментами истории становления современной математики. В ее основу положены лекции по курсам «Введение в специальность» и «История математики», читаемым автором студентам МГТУ им. Н.Э. Баумана, обучающимся по специальности «Прикладная математика». В первой части книги основное внимание уделено биографиям творцов математики и тех мыслителей, чьи идеи оказали решающее влияние на развитие этой науки. Во второй части изложена история некоторых основных математических понятий и идей.

Для студентов технических вузов и учителей математики, а также всех, интересующихся историей науки.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 5-7038-2206-8

Посвящается моим внукам —
Ксении и Даниилу

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предисловие можно назвать громоотводом.
Г.К. Лихтенберг

В основе книги лежит курс лекций по истории математики, читаемый автором в Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана. Свою задачу автор видел в систематизации имеющегося материала и его изложении таким образом, чтобы у читателя, практически не знакомого с историей математики, составилась более или менее цельная картина ее развития. Автор не работал с архивными документами и содержание книги фактически заимствовано из опубликованных исследований других авторов. Иногда автор позволял себе включить в повествование без изменения отдельные понравившиеся абзацы из литературных источников. Чаще других использовались книги Г. Вейля, М. Клайна, Ф. Клейна, Н.Я. Виленкина, В.А. Никифоровского, В.А. Успенского, В.М. Тихомирова, В.Д. Чистякова.

При подготовке книги автор постоянно помнил высказывание великого француза Блеза Паскаля: «Предмет математики настолько серьезен, что полезно не упускать случая сделать его немного занимательным» [57, с. 12]. С этой целью он старался отдавать предпочтение тем фактам из жизни творцов математики, которые характеризуют их личности, и не стремился скурпулезно перечислять все полученные ими результаты. В предисловии к книге Линкольна Барнета «Вселенная и доктор Эйнштейн» в 1948 г. А. Эйнштейн писал: «Всякий, кто хоть раз пытался популярно изложить какое-либо научное положение, знает, какие огромные трудности стоят на этом пути. Можно преуспеть в доходчивости, уйдя от изложения сущности проблемы и ограничившись лишь смутными намеками на нее, и таким образом обмануть читателя, внушив ему иллюзию понимания. Можно, наоборот, квалифицированно и точно изложить проблему, но так, что неподготовленный читатель скоро потеряет мысль автора и лишится возможности следовать за ней дальше» [57, с. 128]. В предлагаемой книге сделана попытка найти «золотую середину» между доходчивостью и точностью изложения математических проблем, поэтому в ней мало формул.

Творцы математики были необычайно одаренными и широко образованными людьми, автор хотел показать их вклад в мировую культуру, а также проследить связь развития математики с общим развитием нашей цивилизации. Чтобы это стремление не повредило чисто математическому аспекту книги, она разделена на две части. Первую часть составляют в основном биографии творцов математики и тех мыслителей, которые, не будучи математиками, оказали огромное влияние на ее историю, а вторую часть — история некоторых разделов и идей математики. В первой части материал изложен «по горизонтали», в хронологическом порядке, а во второй — «по вертикали», от древних времен до наших дней.

Чтобы сделать более понятной связь развития математики с состоянием общества, в первой части книги в начале некоторых глав дана краткая характеристика соответствующего исторического периода.

На уровень математических знаний часто оказывали влияние организационные мероприятия внутри отдельных государств. Чтобы читателю стало понятно, почему, например, в математике начала XIX в. встречаются в основном французские фамилии, а в математике второй половины XIX в. — немецкие, в гл. 12 рассказано о Политехнической школе в Париже, а в гл. 16 — о системе обучения в университетах Германии.

В настоящее время фактически отсутствует анализ развития математики в XX в. В книге предпринята попытка восполнить этот пробел с привлечением доступного автору материала. Этой проблеме посвящены (полностью или частично), начиная с гл. 18, почти все главы за исключением гл. 24 и 28.

Гл. 19 целиком посвящена Международным конгрессам математиков, так как, в частности, II Международный конгресс, состоявшийся в 1900 г. в Париже, оказал судьбоносное влияние на математику XX столетия.

В подготовке книги неоценимую помощь автору оказал профессор Зарубин Владимир Степанович. Ему принадлежит идея создания книги. Рекомендации и советы В.С. Зарубина были учтены при отборе материала, а замечания, сделанные при чтении рукописи, помогли исключить повторы и значительно улучшить содержание.

Автор благодарен доценту Канатникову Анатолию Николаевичу, который внес много полезных предложений, способствовавших улучшению изложения материала, а также редактору издательства МГТУ им. Н.Э. Баумана Кошелевой Елене Константиновне, приложившей немало усилий для устранения стилистических погрешностей.

В.Ф. Панов

ВВЕДЕНИЕ

Вся история математики состоит из чередующихся процессов «расширений» и «сокращений». Например, внимание математиков привлекает какая-нибудь задача, пишутся сотни статей, каждая из которых освещает лишь одну сторону истины. Вопрос разрастается. Затем какой-нибудь гений, опираясь на все данные, собранные с таким трудом, заявляет: «Все, что мы знаем, станет почти очевидным, если посмотреть на это вот с такой точки зрения». После этого никому, кроме историков математики, нет уже необходимости изучать сотни отдельных статей. Разрозненные выводы объединяются в одну простую доктрину, важные факты отделяются от шелухи, и прямой путь к желаемому выводу открыт для всех.

У.У. Сойер

Математика и познание окружающего мира

С момента появления первых цивилизаций человечество стремилось познать окружающий мир, понять происходящее в природе. Решающий, гигантский по своим масштабам и непреходящий по своему значению шаг к расширению и приумножению нашего знания о внешнем мире был сделан, когда для изучения его стали применять математику. Отметим, что термина «математика» в древности не существовало. Вероятно, наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира стала называться позднее, в средние века, когда европейцы ознакомились с арабскими переводами трудов древнегреческих ученых. Поэтому, говоря о математике Древнего Мира, мы имеем в виду методы накопления и систематизации научного материала по количественному изучению явлений природы. Математика не только уточнила и расширила наше восприятие окружающего мира с помощью органов чувств, но и позволила открыть весьма важные явления, не воспринимаемые нами, но от того не менее реальные по их воздействию на человека. Нам, живущим в начале 3-го тысячелетия, природа и «земные» приложения математики хорошо известны, и потому воспринимаются они как нечто само собой разумеющееся. Уже цивилизации, в недрах которых математика зарождалась, а именно цивилизации Древнего Египта и Древнего Вавилона, более 5 тыс. лет назад создали набор полезных, но не связанных между собой правил и формул для решения практических задач, с которыми люди сталкивались в повседневной жизни. Вавилоняне и египтяне не осознавали, что математика способна распространить их знание природы за пределы, доступные чувственному опыту.

Как единое связное целое и средство познания природы математика есть творение древних греков. Они начали заниматься этим примерно за шесть веков до нашей эры. Не сохранилось никаких документов VI—V вв. до н. э., способных рассказать нам, что заставило греков прийти к новому пониманию математики и ее роли. Мы располагаем лишь более или менее правдоподобными догадками историков, один из которых утверждает, что греки обнаружили противоречия в результатах, полученных древними вавилонянами при определении площади круга, и вознамерились выяснить, какой из результатов верен. В качестве еще одного объяснения историки ссылаются на философские интересы греков, но это только догадки.

По-видимому, нам остается лишь констатировать, что у греков начиная с VI в. до н. э. сложилось определенное миропонимание, сущность которого сводилась к следующему. Природа устроена рационально, а все явления протекают по точному и неизменному плану, который в конечном счете является математическим. Человеческий разум всесилен, и если эту могучую силу приложить к изучению природы, то лежащий в основе мироздания математический план удастся раскрыть и познать [43].

Разработанная пифагорейцами программа выявления рационального плана, лежащего в основе природы, предполагала использование математики. Они усматривали сущность вещей и явлений в числах и числовых соотношениях. Число для них было первым принципом в описании природы, и оно же считалось выражением материи и формы мира. Пифагорейцы полагали, что «все вещи суть числа». К числовым соотношениям они сводили и музыку, и астрономию. По их представлениям, тела, перемещаясь в пространстве, производят звуки, причем быстро движущееся тело издает более высокий звук, чем движущееся медленно. Такая «музыка сфер» может быть сведена к чисто числовым отношениям. Но тогда к числовым отношениям можно свести и движения планет.

Первым из греков, кому мы обязаны наиболее существенным шагом в математическом исследовании природы, был Платон. Он не только воспринял некоторые стороны учения пифагорейцев, но и был выдающимся философом, чьи идеи во многом определили развитие мысли в Древней Греции. Согласно Платону, то, что воспринимают наши органы чувств, не более чем несовершенное представление реального мира. Реальность и рациональность физического мира могут быть постигнуты только с помощью математики. Платон заложил также основы дедуктивно-аксиоматического метода, являющегося в настоящее время основным при построении математического знания.

Началом современного периода развития математики принято считать конец XV — начало XVI в. Что касается XVI в., то его часто называют эпохой Возрождения (Ренессанса) — возрождения греческой мысли. Примерно к 1500 г. европейские умы ознакомились с основной идеей мыслителей античности о необходимости приложения разума к исследованию природы и поиска математического плана, лежащего в основе мироздания. Но если греки не сомневались, что природа устроена на математических принципах, неизменно и неуклонно следует некоему идеальному плану, то мыслители конца Средневековья приписывали весь план и все действие христианскому Богу. Именно Бог был, по их представлениям, творцом и создателем плана мироздания, и все явления природы неукоснительно следовали предначертаниям Творца, беспрекословно подчиняясь его воле. Математики и естествоиспытатели эпохи Возрождения, будучи правоверными христианами, разделяли эту доктрину. К уже существующим учениям был добавлен новый тезис о том, что Бог сотворил мир на математической основе.

Математики XVI—XVIII вв. были уверены в существовании математических законов, лежащих в основе всех явлений природы, и настойчиво стремились найти их, ибо исходили из убеждения, что Бог и эти законы включил в общую схему мироздания.

Галилео Галилей предложил план изучения природы, включавший четыре пункта [43]:

1) получить количественные описания физических явлений и облечь их в математические формулы;

2) выделить и измерить наиболее фундаментальные свойства явлений (свойства — переменные в формулах);

3) построить физику на основе фундаментальных физических принципов, используя дедуктивный метод;

4) при изучении явлений непременно прибегать к идеализации.

Особенности математического метода

Первая отличительная особенность математического метода — *введение основных понятий*. Некоторые из таких понятий (например, точка, линия, целое число) подсказаны непосредственно материальным, или физическим, миром. Помимо элементарных понятий в математике немаловажную роль играют понятия, созданные человеческим разумом. Их примерами могут служить понятия отрицательного числа, комплексного числа, функции, математического анализа, буквенные обозначения классов чисел, всевозможные кривые, бесконечные ряды, дифференциальные уравнения, матрицы и группы, многомерные пространства.

Некоторые из перечисленных понятий полностью лишены интуитивной основы. Другие, например понятие *производной* (мгновенной скорости движения), имеют под собой некую основу в физических явлениях. Но и производную в гораздо большей степени можно рассматривать как конструкцию, созданную разумом, причем на качественно совершенно новом уровне, нежели, скажем, понятие математического треугольника.

Вторая отличительная особенность математики — ее *абстрактность*. В одном абстрактном математическом понятии должны быть отражены существенные особенности всех физических проявлений этого понятия. Например, математическая прямая должна заключать в себе все наиболее значительные особенности туго натянутых веревок, краев линеек, границ полей и траекторий световых лучей.

Третья отличительная особенность математики — *идеализация*. Математик идеализирует, намеренно отвлекаясь от толщины меловой линии при рассмотрении прямых или принимая Землю при решении некоторых задач за идеальную сферу. Сама по себе идеализация не является серьезным отступлением от реальности, но при любой попытке приложить ее к реальности возникает вопрос, достаточно ли близок исследуемый объект (например, реальная частица или траектория) к его идеальному образу.

Четвертой отличительной особенностью математики является *использование специальных обозначений*. Хотя страница, испещренная математическими символами, способна отпугнуть непосвященного, нельзя не признать, что без специальных обозначений математики погрязли бы в неразберихе слов.

Наиболее поразительной, пятой, отличительной особенностью математики является используемый ею *метод рассуждения*. Основу его составляет *набор аксиом* с применением к ним *дедуктивного доказательства* (вывода). Слово «аксиома» происходит от греческого выражения «мыслить подобающим образом». Само понятие аксиомы — истины столь самоочевидной, что она ни у кого не вызывает сомнения, — введено греками. Аристотель во «Второй аналитике» упоминает об общих положениях, называемых им аксиомами, из которых выводится доказательство и истинность которых постигается безошибочной интуицией. Хотя Эрик Т. Белл в шутку сказал, что «аксиома — это предрассудок, освященный тысячелетиями» [43, с. 168], а Альберт Эйнштейн заметил, что «здравый смысл — это толща предрассудков, успевших отложиться в нашем сознании к восемнадцати годам» [93, с. 192], без аксиом нам не обойтись. Если бы в доказательстве использовались какие-то факты, не известные нам как истины, то потребовалось бы дополнительное доказательство, которое устанавливало бы эти факты, и этот процесс пришлось бы повторять бесконечно. Аристотель указывал также на то, что некоторые понятия должны оставаться неопределяемыми, ибо в противном случае доказательство не будет иметь начала.

В наше время такие понятия, как точка и прямая, остаются неопределяемыми, их значение и свойства зависят от аксиом, предписывающих свойства точек и прямых. Аксиоматизация новых понятий требует более тонкого подхода, поэтому правильные аксиоматические обоснования некоторых разделов математики удалось создать лишь через много лет после возникновения этих разделов.

Суть тех средств, которыми математики добывают фактические данные, характеризующие внешний мир, можно сформулировать следующим образом: математика строит *модели целых классов реальных явлений*. Понятия, обычно идеализированные (независимо от того, почерпнуты они из наблюдений природы или являются плодами человеческого разума), аксиомы, которые также могут быть подсказаны физическими фактами или придуманы людьми, процессы идеализации, обобщения и абстракции, а также интуиция — все идет в ход при построении моделей. Доказательство цементирует модель как единое целое.

Математика, опираясь на человеческий разум и способность человека к рассуждениям, порождает знание о реальном мире, которое среднему человеку, даже если он воспитан на рациональной западной культуре, кажется полученным исключительно путем чувственного восприятия, хотя таковым и не является.

О религиозности творцов математики

Подавляющее большинство творцов математики были глубоко религиозными людьми. Однако в книгах о науке, издававшихся в СССР, делались попытки представить всех творцов науки атеистами или же говорилось об их религиозности как явном недостатке. Более того, одним из самых больших недоразумений последнего столетия было противостояние науки и религии как двух враждебных друг другу сил. А должны ли они враждовать и всегда ли враждовали?

Так было не всегда. Самим своим происхождением наука обязана религии, и обе они издавна существовали в тесном взаимодействии. Религиозно-символическое мировосприятие не только не исключало становления и развития научной мысли, но и на первых порах было, в сущности, единственным путем, приведшим к появлению науки в современном смысле слова.

Мы так привыкли видеть в религии только отрицательный опыт человечества (и не без оснований, достаточно вспомнить инквизицию), что перестали думать, а говорить и подавно, о неизмеримом вкладе религии в человеческую культуру.

Основы математики, астрономии, медицины созданы египетскими и вавилонскими жрецами. Первые анатомические и географические атласы, первые математические формулы — плод труда людей, служивших религии. Творцы античной науки были одновременно и религиозными мыслителями. Общество пифагорейцев, так много сделавших для прогресса математики, представляло собой религиозный орден. Аристотель, отец современного естествознания, был создателем религиозно-философских принципов, вошедших впоследствии в христианское мировоззрение. Употребление арабских цифр в Европе ввел французский монах, математик и философ Герберт, впоследствии ставший папой римским Сильвестром II.

Средневековые университеты имели привилегии, определяемые папской буллой. Церковь, и только она одна, занималась всеми вопросами образования.

Создателем гелиоцентрической концепции был польский священник Николай Коперник. Его книга «О вращении небесных сфер» была посвящена папе римскому, который принял ее благосклонно. Религиозным человеком, близко стоявшим к церковным кругам, был Галилей. Декарт и Кавальери, Ньютон и Лейбниц, Кеплер и Паскаль совершали свои научные подвиги, оставаясь искренне религиозными людьми.

Родоначальник английского материализма Фрэнсис Бэкон утверждал, что мелкая философия сподвигает ум человеческий к атеизму, а глубокая философия приводит его к религии.

Эйнштейн утверждал, что вера в осмысленность мироздания вдохновляет исследователя. Наука и религия должны свободно развиваться, не препятствуя друг другу. Это следует из качественных различий объектов, на которые они направлены. Наука отвечает на запросы разума, отсюда ее непреодолимая мощь, религия — на запросы сердца, отсюда ее магическая сила [112]. Наука и религия — эти два пути познания реальности — должны не просто быть независимыми сферами, но в гармоничном сочетании способствовать движению человечества на пути к истине.

Ошибки ученых поучительны

Нередко в книгах по истории вообще и по истории естественных наук и математики в частности допускается снисходительный тон по отношению к тем личностям, имена которых дошли до нас. Однако высокомерное отношение к давно жившим людям — негативная особенность. Наши предки были не глупее нас. Люди поступают разумно (с их точки зрения) для достижения определенных целей, и, если поведение какого-либо человека кажется нам неразумным, это, вероятнее всего, означает, что мы не понимаем тех целей, которые человек преследовал или преследует. Поэтому нельзя давать оценку деятельности человека, не проанализировав те обстоятельства, в которых он действовал.

Математику создавали гениальные люди, и их интересы редко ограничивались чем-то одним. Иногда они ошибались, но и ошибки их очень показательны. Например, один из учеников Д.К. Максвелла, Г. Лэмб, рассказывал, что тот не считался отличным лектором, к тому же приходил на занятия без записей. Выводя у доски формулы, он часто сбивался, допускал ошибки. Но, наблюдая, как учитель искал и исправлял свои ошибки, Лэмб, по его признанию, узнал больше, чем из многих прочитанных книг. По этому поводу П.Л. Капица мудро заметил: «Ничто так не поучительно, как заблуждения гения» [95, с. 111].

Любопытно обратить внимание на то, как трансформируется оценка деятельности ученого с течением веков. Кардано не сомневался в том, что его главные заслуги относятся к медицине, а не к математике; похоже, Кеплер считал своим главным достижением «открытие» мифической связи между орбитами планет и правильными многогранниками; ни одно свое открытие Галилей не ценил так, как ошибочное утверждение, что приливы и отливы доказывают истинное движение Земли; Гюйгенс гордился применением циклоидального маятника в часах, оказавшегося полностью бесполезным на практике. Список можно продолжить.

Одной из особенностей науки является самокоррекция. Познание обладает замечательным свойством преодоления и изъятия (по мере продвижения вперед) ошибок и промахов, допущенных прежними авторитетами. При действии механизма самокоррекции ошибки не столь уж опасны. Опасно другое: посчитать достоверный результат заблуждением и отлучить его от науки. Такая ситуация позволяет (а может быть, заставляет) рисковать. Пусть будут сбои, уклонения, неверные шаги. Но мы подстрахованы тем, что знание предрасположено к самоочищению, и все прегрешения могут быть и должны быть исправлены. Говорят же: «Наука безупречна, а заблуждаются ученые».

Как совершаются в математике открытия и что заставляет ученых их совершать

Морис Клайн в марте 1955 г. в журнале Scientific American писал: «Творческий акт имеет мало общего с логикой или рациональными рассуждениями. Вспоминая обстоятельства, при которых их озарила блестящая идея, математики нередко отмечали, что вдохновение не имело прямого отношения к тому, чем они в это время занимались. Иногда озарение наступало в тот момент, когда человек ехал в транспорте, брился или размышлял о чем-нибудь другом. Творческий процесс нельзя по желанию довести до наивысшей точки или продлить самыми радостными посулами. Он проистекает особенно успешно, когда разум предается праздности и воображение свободно расправляет крылья».

В книге «Прелюдия к математике» У.У. Сойер отмечал: «Почти все математические открытия имеют в основе очень простую идею. Учебники часто скрывают этот факт. Они обычно содержат громоздкие выводы и этим создают впечатление, что математики — это люди, которые всю жизнь просиживают за письменными столами и переводят тонны бумаги. Это чепуха. Многие математики очень успешно работают в ванной, в кровати, ожидая поезда или катаясь на велосипеде (предпочтительно при слабом уличном движении). Математические вычисления производятся до или после открытия. Само открытие возникает из основных идей» [93, с. 5—6]. В этой связи любопытно вспомнить, что Эйнштейн, например, лихорадочно делал выкладки по теории относительности на обратной стороне подвернувшегося под руку старого конверта. Гамильтону идея кватернионов пришла в голову на Королевском мосту, на перилах которого он и написал первые формулы. Из воспоминаний Пуанкаре мы знаем, что долго не дававшееся ему доказательство важной теоремы из теории автоморфных функций неожиданно было найдено, когда он занес ногу на ступеньку омнибуса. И подобных примеров можно привести множество.

Уже упомянутый нами Пуанкаре предлагает очень интересную схему математического творчества. Он связывает его с делением человеческой психики на сознательную и бессознательную части. Процесс начинается с сознательных усилий, направленных на решение некоторой проблемы. Эти усилия повышают активность бессознательной части психики. Там появляется множество новых комбинаций математических объектов — как бы возможных фрагментов решения. Они возникают в громадном количестве и с колоссальной скоростью. Сейчас мы могли бы сравнить эту фазу с работой грандиозного компьютера. Но подавляющая часть этих комбинаций бесполезна для решения проблем. Они, за очень небольшим исключением, не достигают сознания, проходят отбор, основанный на эстетическом принципе. Некий эстетический барьер позволяет лишь небольшому числу их проникнуть в сознание. Они появляются там как готовая идея решения, причем это сопровождается очень сильным субъективным чувством уверенности в правильности идеи. Дальше остается лишь техническая работа по осуществлению найденного решения.

А что заставляет ученых делать открытия? Очевидно, что существует тесная взаимосвязь между математикой и общекультурными устремлениями эпохи, которые отражают общественные и экономические условия. Даже такой гений, как Ньютон, может прокладывать новые пути в математике и механике только тогда, когда в обществе есть силы, готовые поддержать и ободрить его, создать ему условия для работы и для того, чтобы он был услышан. Возникновение в XVII в. современной математики можно понять лишь с учетом того, что в то время в экономической жизни Западной Европы капитализм начинает брать верх над феодализмом. Общественно-экономическое состояние общества влияло на развитие физики, географии, навигации, архитектуры, живописи, которые, в свою очередь, стимулировали развитие математики. На математику также оказывали влияние земледелие, торговля, промышленность, философия и военное дело.

В XVI—XVIII вв. важно было обеспечить безопасность океанских плаваний (в 1492 г. Колумб открыл Америку). Требовались точные методы для определения координат корабля в море (в основном долготы, так как широта определялась легко). Правительства, академии и частные лица поощряли занятия этой проблемой почестями, пожертвованиями и премиями. В поисках решения проблемы были усовершенствованы навигационные приборы и часы, исследовано движение Луны и спутников Юпитера. Все исследования по картографии, навигации, механике и астрономии «оплодотворили» математику той эпохи, в частности математический анализ.

Возможны разные точки зрения на смысл занятия математикой. В XIX в. возник спор между двумя знаменитыми учеными — французским математиком Жозефом Фурье и немецким математиком Карлом Якоби. Фурье считал, что цель математики — содействовать объяснению природы. Якоби отвечал, что ее цель — прославлять человеческий разум. Оба они правы. Но математика, кроме того, помогает философскому осмыслению мира и позволяет решать практические задачи, возникающие в других областях человеческой деятельности.

Однако нельзя думать, что стимулом к развитию математики являются только меркантильные соображения. Говорят, что летчики и моряки не могут быть счастливы без своих океанов, потому что они дают им ощущение власти над тремя координатами. Но как же сильно должна тогда властвовать над человеком древнейшая из наук, если она позволяет окунуться в пространство любых измерений, познавать законы Вселенной и атома, искать гармонию и смысл в окружающем мире и любую сложнейшую мысль изложить легко и изящно [57].

Занятия математикой стимулируют развитие способностей человека. Так, А.И. Маркушевич пишет: «Кто с детских лет занимается математикой, тот развивает внимание, тренирует свой мозг, свою волю, воспитывает в себе настойчивость и упорство в достижении цели» [58, с. 13]. Его дополняет А.Д. Александров: «Математика учит точности мысли, подчинению логике доказательства, понятию строго обоснованной истины, а все это формирует личность, пожалуй, больше, чем музыка» [58, с. 14]. Польский математик

Г. Штейнгауз даже высказал мнение, что если поручить двум людям, один из которых — математик, выполнение любой незнакомой работы, то результат всегда будет следующим: математик сделает ее лучше. Другой польский ученый и просветитель Ян Снядецкий писал: «Математика — царица всех наук. Ее возлюбленный — истина, ее наряд — простота и ясность. Дворец этой владычицы окружен тернистыми зарослями, и, чтобы достичь его, каждому приходится продираться сквозь чащу. Случайный путник не обнаружит во дворце ничего привлекательного. Красота его открывается лишь разуму, любящему истину, закаленному в борьбе с трудностями, свидетельствующему о незаурядности и непреодолимой склонности человека к необычайно запутанным, но неиссякаемым и возвышенным наслаждениям ума, свойственным самой природе вещей» [58, с. 17].

Существует еще и романтика поиска: «Хочу знать — весь сказ! Просто так! Потому что это — моя жизненная потребность, потому что без этого мне жизнь — не в жизнь. Хочу знать потому, что не могу не хотеть этого!» В 1956 г. Борис Пастернак писал:

Во всем мне хочется дойти
До самой сути.
В работе, в поисках пути,
В сердечной смуте.

До сущности протекших дней,
До их причины,
До оснований, до корней,
До сердцевины.

Все время схватывая нить
Судеб, событий,
Жить, думать, чувствовать, любить,
Свершать открытья…

Науковеды Иллинойсского университета (США) провели исследование ряда научных новшеств, имеющих явную экономическую ценность. Они обнаружили, что 63,5 % новинок привнесли ученые, которыми руководило простое любопытство. При так называемом ориентированном поиске (когда намечены подсказывающие результат вехи) получено 28,8 %, и всего 7,7 % пришлось на долю разработок, нацеленных на решение специальной задачи.

Математики много раз меняли представление о своей науке и делали это каждый раз под давлением определенных факторов, которые заставляли их отказываться от привычных воззрений.

Становление каждого раздела математики связано вначале с объяснением каких-то загадок природы, затем, постепенно внедряясь в повседневную деятельность, математическое знание позволяет решать технологические задачи текущего дня.

Современное освоение математики — это не просто знакомство с набором имеющихся интуитивных представлений об этой науке, для него не достаточно непосредственного изучения тех или других математических теорий. Необходимо исследование истории математики, анализ ее структуры, отношения к другим наукам.

Рассказывать о современной математике без всякой ссылки на математику прошлого — это то же самое, что играть третий акт пьесы, не объяснив предварительно, что происходило в первых двух. Из-за нехватки учебного времени преподавателям обычно не удается рассказать о жизни великих творцов математики — интенсивной, целенаправленной, поучительной, хотя подчас и драматичной. Так и остается неведомым для нас облик незаурядных, духовно прекрасных личностей ученых — гениев математики — со всем богатством их натуры и разносторонними интересами.

В представлении многих, ученые — творцы математических абстракций — сами являются какими-то полуабстрактными существами, «сухарями», погруженными в свою науку и ничем другим не интересующимися. Заблуждение это происходит от неведения того, что гениальность — «великий дар благой природы» — совместима только с личностью, увлеченной вдохновенным созидательным трудом, разносторонне деятельной, может быть, при этом, и сложной, но всегда глубокой, содержательной.

Большое математическое дарование нередко сочетается также с проявлением творческого интереса к поэзии, прозе, другим видам искусства. Эйнштейн искал красоту во Вселенной задолго до создания общей теории относительности, и сама теория возникла из чувства эстетической неудовлетворенности [36].

Часть I

История математики как часть истории цивилизации

Математика — это большой город, чьи предместья не перестают разрастаться, в то время как центр периодически перестраивается, следуя каждый раз все более и более ясному плану и стремясь к все более и более величественному расположению, в то время как . . . старые кварталы с их лабиринтом переулков сносятся для того, чтобы проложить к окраине улицы все более прямые, все более широкие и удобные.

Н. Бурбаки

Глава 1

МАТЕМАТИКА ДРЕВНЕГО ВОСТОКА

> Стиль любой зарождающейся математики полностью зависит от той культуры, в которой она возникает, от особенностей народа, над ней размышляющего.
>
> *О. Шпенглер*

Древние цивилизации Востока развивались на берегах великих рек Африки и Азии — Нила, Тигра и Евфрата, Инда, позже Ганга, Хуанхэ, еще позже Янцзы. В этих цивилизациях происходило отождествление Церкви и государственного аппарата. Во многих восточных странах областями управляли жрецы. А так как занятия наукой были прерогативой чиновничества, жрецы выступали обладателями научных знаний.

Восточная математика возникла как прикладная наука, имевшая цель облегчить календарные расчеты, распределение урожая, организацию общественных работ и сбор налогов. Вначале стала развиваться арифметика как собрание постепенно накапливающихся практических правил для решения повседневных житейских задач. Эти правила сводились к сложению, вычитанию, умножению и делению чисел, вначале только целых, а затем — постепенно и в очень медленном развитии — и дробных. Первые геометрические результаты были получены в Египте и в Месопотамии: после затопления

Глава 2

МАТЕМАТИКА ДРЕВНЕЙ ГРЕЦИИ

Греки — это не способные школьники или хорошие студенты, но, скорее, «коллеги из другого колледжа».

Дж. Литлвуд

Теоретическая часть математики имеет истоки в научных и философских школах Древней Греции. Эллины как народ сложились в результате двух вторжений индоевропейских завоевателей. Около 2000 г. до н. э. на полуострове Пелопоннес обосновались ахейцы, о которых мы можем судить по деяниям и подвигам полулегендарных героев, описанных Гомером. В конце VII в. до н. э. произошло переселение народов, затронувшее западное побережье Малой Азии (Ионию) и острова Эгейского моря. Вторжение дорийцев вызвало новое переселение. В VI—IV вв. до н. э. Греция представляла собой совокупность рабовладельческих государств-полисов (городов), оживленно торговавших как между собой, так и с другими государствами Средиземноморья: Египтом, Финикией, Персией.

По сравнению с Древним Востоком в Греции были введены два новшества: неудобное письмо Востока заменено легкодоступным алфавитом и введена чеканная монета, облегчающая торговлю.

Ведущее место среди греческих натурфилософских школ последовательно занимали: *ионийская* (VII—VI вв. до н. э.), *пифагорейская* (VI—V вв. до н. э.) и *афинская* (со второй половины V в. до н. э.).

Глава 3

АЛЕКСАНДРИЙСКАЯ МАТЕМАТИКА (МАТЕМАТИКА В ЭПОХУ ЭЛЛИНИЗМА И РИМСКОЙ ИМПЕРИИ)

> Эллинистическая культура — это эллинская культура, выплеснутая благодаря завоеваниям Александра Македонского далеко на юг в Африке и еще дальше на восток в Азии — до самого ее сердца, до Средней Азии и Индии.
>
> *А.Н. Чанышев*

Эллинизм — трехсотлетний период в истории Восточного Средиземноморья и прилегающих к нему континентальных областей в Азии и Африке, оказавшихся под духовным влиянием греческой культуры. Он длился от победы Македонии над Грецией в 338 г. до н. э. до покорения Египта римлянами в 30 г. н. э. Эпоха Римской империи закончилась в 476 г. н. э.

Империя Александра Македонского занимала территорию, ныне полностью включающую в себя Афганистан, Иран, Ирак, Сирию, Ливан, Израиль, Египет, Турцию, Грецию, Македонию. Частично на этих территориях размещены Пакистан, Ливия, Узбекистан, Туркменистан. Столицей империи стал древнейший город Вавилон [108].

После смерти Александра империя была поделена между его полководцами и их потомками. В 322 г. до н. э. определилось царство Птолемеев (Египет), в 312 г. до н. э. — царство Селевкидов

Глава 4

АЛЕКСАНДРИЙСКАЯ АСТРОНОМИЯ

Хотя древние греки не были творцами астрономии в ее современном виде, именно они заложили ее основы и создали предпосылки для последующего развития теории. Греки явили миру образцы первых истинно математических рассуждений и положили начало пониманию космических явлений.

М. Клайн

Аристарх Самосский

Как и Пифагор, Аристарх Самосский (ок. 310 — 230 до н. э.) происходил с ионийского острова Самос. По-видимому, он был старшим современником Архимеда, написавшего об Аристархе Самосском не позднее 216 г. до н. э. [61]. Единственная точная дата, связанная с именем Аристарха, — это 281 г. до н. э., когда Аристарх мог наблюдать описанное им солнечное затмение.

Среди достижений астрономов александрийского периода особое место занимает гелиоцентрическая система, выдвинутая Аристархом. На основе космологических вычислений Аристарх пришел к идее гелиоцентризма. Он пытался установить некоторые основные параметры Солнечной системы и вычислить, во сколько раз

— Солнце отстоит дальше от Земли, чем Луна;

Глава 5

МАТЕМАТИКА ИСЛАМСКОГО ВОСТОКА ПОСЛЕ УПАДКА ДРЕВНЕЙ ГРЕЦИИ

> Исследуя геометрию греков и алгебру индийцев одну при помощи другой и благодаря взаимной поддержке, оказываемой этими двумя отраслями науки, арабы сообщили математическим наукам тот особый и оригинальный характер, который перешел к европейцам и в руках их послужил в XVI столетии основою быстро развившегося превосходства новой науки перед наукою древних.
>
> *М. Шаль*

Особенности исламской культуры

Исторически сложилось так, что в Европе до XVI в. не было достигнуто значительных результатов в алгебре. Результаты появились на Арабском Востоке после возникновения там ислама, и это не случайно. Остановимся подробнее на версии, объясняющей этот факт.

Мудрецы древности считали, что все в мире соответствует четырем стихиям: огню, воде, воздуху, земле. Исходя из этих понятий, на Западе господствует стихия огня, в странах Арабского Востока — стихия воды. Обосновывается это так. Исламская культура выросла из культуры арабов, народа, к которому принадлежал

Глава 6

МАТЕМАТИКА В ЕВРОПЕ В СРЕДНИЕ ВЕКА И В ЭПОХУ ВОЗРОЖДЕНИЯ

Математика представляет искуснейшие изобретения, способные удовлетворить любознательность, облегчить ремесла и уменьшить труд людей.

Р. Декарт

Общая характеристика эпохи

Создание университетов. Принято считать, что европейская цивилизация и наука ведут свой отсчет с 795 г., когда по повелению Карла Великого была организована первая школа в столице королевства Ахене. В этой школе изучали и математику. Самым знаменитым преподавателем школы был уроженец Британии Алкуин, написавший первую в Европе книгу для школьников — «Задачи для изощрения ума юношей».

С конца XI в. в Европе стали заметны сдвиги в науке и технике. Они были обусловлены значительными изменениями в экономике: возникновением ремесел, ростом городов, развитием торговли, увеличением продуктивности сельского хозяйства. Заметную роль сыграло знакомство европейцев с культурой Востока во времена крестовых походов.

Глава 7

АСТРОНОМИЯ В XVI В.

И все-таки она вертится.
Г. Галилей

Коперник

Коперника всегда будут помнить как человека, который потряс мироздание, изгнав Землю и все живые существа на ней из его центра, предоставив им куда более скромное место в плане Вселенной.
Б. Лейджер

Николай Коперник (1473—1543) родился в польском городе Торуни. Отец Коперника умер, когда Николаю было 10 лет. Ответственность за его благополучие и воспитание взял на себя дядя мальчика — состоятельный священник. Будучи епископом Вармии, дядя позаботился и о том, чтобы Коперник стал одним из каноников Фромборкского кафедрального собора в Вармии, обеспечив тем самым Николаю приличный доход на весь остаток жизни.

Учился Коперник в Краковском университете на богословском факультете, потом почти 10 лет прожил в Италии. В Болонье, Риме, Падуе и Ферраре он изучал медицину, юриспруденцию и астрономию. Возвратившись в 1506 г. в Польшу, Коперник в течение нескольких лет был секретарем и врачом своего дяди епископа, по-

Глава 8

МАТЕМАТИКА В XVII В.

> В истории науки математика XVII в. занимает особое, весьма значительное место. XVII в. открывает новый период — период математики переменных величин.
>
> *К.А. Рыбников*

Общая характеристика

XVII в. является поворотным не только для математики, но и для естествознания в целом. Причина бурного развития естествознания в XVII в. заключается в необычайно возросших экономических ресурсах европейских государств, в том, что на арену политической жизни вышел новый класс — буржуазия. Достижения научного естествознания утверждаются буржуазией в качестве одного из основных средств ее господства.

Перед наукой встала задача создания таких методов, которые вместе с возможностью наиболее широкого приложения были бы достаточно простыми и компактными. XVII в. ознаменовался появлением трех исключительных по силе и значению созданий человеческого ума: логарифмов, аналитической геометрии и исчисления бесконечно малых (дифференциального и интегрального исчисления). Эти три открытия можно коротко определить следующим образом: метод наиболее экономного и эффективного вы-

Глава 9

РАЗВИТИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МЕТОДОВ В XVII В.

> В сокровищнице науки и культуры есть идеи, которые, возникнув в глубокой древности и развиваясь и совершенствуясь, прошли через все последующие времена и успешно служат человечеству сейчас. К ним, безусловно, следует отнести идею интеграла в математике.
>
> *В.А. Никифоровский*

В высших учебных заведениях сначала изучают дифференциальное исчисление, а затем — интегральное, но их историческое развитие шло в обратном порядке. Главное внимание математиков XVII в. было направлено на разработку методов вычисления определенных интегралов. Знак интеграла (вытянутая буква S) был введен Лейбницем, а слово «интеграл» — его учеником Иоганном Бернулли в конце XVII в.

Ньютон и Лейбниц совершили качественный скачок в развитии математики и создали интегральное и дифференциальное исчисления. До них европейские математики занимались преимущественно количественным расширением результатов математиков Античности (в основном Архимеда), дошедших до них, как правило, в арабских переводах. Количественным это расширение названо потому, что математики, освоив методы времен Архимеда, пытались при-

Глава 10

СОЗДАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В начале 1665 г. я открыл метод приближенных рядов и правило для сведения любой степени любого бинома к таким рядам. В мае того же года я открыл метод касательных Грегори и Слюза, а в ноябре — прямой метод флюксий. <...> ...Все это произошло в два чумных года, 1665-й и 1666-й. Ибо в это время я находился в наилучшем для открытий возрасте и думал о математике и философии больше, чем когда-либо позже.

И. Ньютон

В каждой науке, едва приступив к ней и часто не вполне понимая общеизвестное, я искал нового.

Г. Лейбниц

Дифференциальные методы

В математике XVII в. наряду с интегральными методами развивались и методы дифференциальные. К дифференциальным относятся методы решения задач следующих трех типов:

— нахождение касательных к кривым;

— нахождение максимумов и минимумов функций;

— отыскание условий существования кратных корней алгебраических уравнений.

Глава 11

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В КОНЦЕ XVII — XVIII В.

> Именно математика в первую очередь защищает нас от обмана чувств и учит, что одно дело — как на самом деле устроены предметы, воспринимаемые чувствами, другое дело — какими они кажутся; эта наука дает надежнейшие правила; кто им следует — тому не опасен обман чувств.
>
> *Л. Эйлер*

Семейство Бернулли

В отличие от Ньютона, не имевшего учеников, Лейбниц был основателем блестящей школы математиков. Ближайшими помощниками Лейбница в развитии анализа и других направлений математики стали братья Якоб и Иоганн Бернулли.

Род Бернулли — выдающееся явление в истории науки и культуры. Он дал девять крупных математиков, из них три выдающихся (Якоб, Иоганн, Даниил). У старшего брата, Якоба, сын был художником. У Иоганна было пятеро сыновей, но научной деятельностью занимались только трое старших — Николай, именуемый обычно Николаем II, Даниил I и Иоганн II. Все три сына Иоганна I были профессорами математики. У Иоганна II было два сына математика — Иоганн III, академик Берлинской Академии наук, и

Глава 12

МАТЕМАТИКА ВО ФРАНЦИИ В КОНЦЕ XVIII — НАЧАЛЕ XIX В.

> Успехи, достигнутые Ньютоном, Эйлером, Даламбером, Лагранжем и Лапласом в математическом описании и точном предсказании множества самых разнообразных астрономических явлений, были столь впечатляющи, что естествоиспытатели преисполнились гордостью за науку, нередко граничившей с самонадеянностью и высокомерием. Они перестали думать о физическом механизме явлений и сосредоточили все усилия на их математическом описании.
>
> *М. Клайн*

Десятью годами моложе Эйлера был Жан Лерон Даламбер, на 29 лет моложе — Жозеф Луи Лагранж. Вместе они составили замечательный «математический триумвират» конца XVIII в. И хотя в то время уже жили на свете Лаплас, Лежандр, Монж, Фурье, Пуассон, они еще ничего не успели сделать для науки. Коши еще не родился. Будущему «королю математиков» Карлу Фридриху Гауссу в момент смерти Эйлера едва минуло шесть лет.

Остановимся подробнее на личностях Даламбера и Лагранжа. Известный немецкий ученый Иоганн Генрих Ламберт, к которому Эйлер очень хорошо относился и которого Кант считал крупнейшим философом века, говорил так: «Первыми из ныне живущих

Глава 13

КОШИ И ОБОСНОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Что такое эти флюксии? Скорости исчезающе малых приращений. А что такое эти исчезающе малые приращения? Они не есть ни конечные величины, ни бесконечно малые величины, но они и не нули. Разве мы не имеем права называть их призраками усопших величин?

Дж. Беркли

Коши

Огюстен Луи Коши (1789—1857) родился в Париже в семье видного чиновника. Его отец был ревностным католиком и роялистом. Вначале с Коши занимался отец, прекрасный лингвист, а в 1805 г. Огюстен поступил в Политехническую школу в Париже, затем в 1807 г. — в Школу мостов и дорог, которую и окончил в 1810 г. Лагранж отметил выдающиеся математические способности юноши и предсказал ему блестящее будущее. После окончания школы Коши получил ответственное поручение по постройке военного порта в Шербуре. Здесь в 1811 г. он написал свою первую работу о многогранниках, где разрешил некоторые вопросы, не поддававшиеся усилиям первоклассных математиков. Затем последовали другие работы: по теории многогранников, о симметричных функциях, об

Глава 14

ГАУСС И СОЗДАНИЕ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Не считать ничего сделанным, если еще кое-что осталось сделать.

К. Гаусс

Гаусс

В ряду гениальных представителей нашей науки только два великих предшественника Гаусса — Архимед и Ньютон — были столь же щедро одарены природой, как он. И подобно этим двум, Гаусс жил достаточно долго и имел возможность полностью проявить все заложенные в нем силы.

Ф. Клейн

Карл Фридрих Гаусс (1777—1855) родился в немецком городе Брауншвейге в семье поденщика. От отца он унаследовал крепкое здоровье, а от матери — яркий интеллект. Гаусс говорил о себе, что «умел вычислять раньше, чем говорить» [26, с. 142]. Самая ранняя математическая легенда о нем утверждает, что в три года он следил за расчетами отца с каменщиками-поденщиками и неожиданно поправил отца, причем оказался прав [26].

Однажды группе учеников, среди которых был Гаусс, было

Глава 15

РАЗВИТИЕ АБСТРАКТНОЙ МАТЕМАТИКИ В ПЕРВОЙ ПОЛОВИНЕ XIX В.

> Алгебра — это язык, не пользующийся словами, а только математическими символами. Если этот язык символов нам знаком, то на него можно перевести интересующие нас выражения повседневного языка.
>
> *Д. Пойа*

После 1830 г. продуктивность французской школы прикладной математики стала ослабевать. Уже в работах Коши, как видно из анализа его вклада в науку, прикладная математика занимает более скромное место, чем абстрактная математика. В XIX в. абстрактная математика развивалась в двух направлениях:

— осваивались новые разделы математики (например, теория функций комплексного переменного);

— критически пересматривались, в целях усиления строгости, разделы математики, развивавшиеся в предшествующих столетиях.

Последней ярчайшей звездой среди математиков французской школы, а точнее, даже метеором, блеснувшим, чтобы быстро угаснуть, был Эварист Галуа.

Как и самобытный гением математики норвежец Нильс Хенрик Абель, Галуа занимался чистейшей абстрактной математикой

Г л а в а 16

МАТЕМАТИКА В ГЕРМАНИИ ВО ВТОРОЙ ПОЛОВИНЕ XIX В.

Насколько трагической является многовековая политическая история Германии, настолько счастливой является история ее высшего образования.

Г. Вейль

Система обучения в университетах Германии

К середине XIX в. влияние Политехнической школы в Париже на развитие математики пошло на убыль. Центр математической мысли переместился в Германию. Если в начале XIX в. французской когорте математиков противостоял в Германии один Гаусс, то к середине века более прогрессивная система организации высшего образования в Германии проявилась в полной мере. Характеристику германских университетов можно найти в книге Германа Вейля «Математическое мышление» [12].

Германские университеты в Средние века были такими же, как и во всей Европе. В начале XVIII в. в Германии произошли изменения, положившие начало соединению преподавания с научными исследованиями. Философский факультет, который в Средние века играл роль подчиненного, получил статус ведущего, стал центром главных научных исследований и источником знаний, на которых

Глава 17

МАТЕМАТИКА В РОССИИ ДО 1917 г.

Но в искушеньях долгой кары,
Перетерпев судеб удары,
Окрепла Русь. Так тяжкий млат,
Дробя стекло, кует булат.

А.С. Пушкин

Петербургская Академия наук

В XVIII в. в России имелось два учебно-научных центра: Петербургская Академия наук (основана в 1725 г.) и Московский университет (основан в 1755 г.). Становление российской науки и ее выдающиеся мировые достижения были всегда связаны с деятельностью Петербургской Академии наук.

Путешествуя по Западной Европе, Петр I пришел к мысли о создании в новой северной столице Академии наук. В составлении ее проекта активное участие принимал Лейбниц. Академия разделялась на три класса: математический, физический и историко-филологический (с включением юриспруденции), причем в первых двух классах работали по четыре академика, а в третьем — три. В математическом классе по штатному расписанию числились один математик, один астроном (географ) и двое ученых-механиков.

Г л а в а 18

МАТЕМАТИКА В ЗАПАДНОЙ ЕВРОПЕ В КОНЦЕ XIX — НАЧАЛЕ XX В.

> Математика пережила ранее два периода. В первом задачи ставились богами (делосская задача об удвоении куба), во втором — полубогами (Б. Паскаль, П. Ферма). Мы вошли теперь в третий период — задачи ставит нужда (практика), причем, чем задача труднее, тем плодотворнее должны быть методы ее решения и тем шире область их последующего применения.
>
> *П.Л. Чебышев*

Эрмит

Шарль Эрмит (1822—1901), крупнейший из французских математиков второй половины XIX в., родился в Дьезе, главном городе кантона в Лотарингии. Учился он в Париже вначале в коллеже Анри IV, затем в коллеже Луи-ле-Гран, по окончании которого в 1842 г. поступил в Политехническую школу в Париже.

Уже в начале обучения он стал переписываться с берлинским профессором Якоби, которому сообщал результаты своих исследований в области абелевых функций. Успехам в его научной работе помешало то, что он от рождения прихрамывал на правую ногу. Это не было препятствием при поступлении в Политехническую школу,

Глава 19

МЕЖДУНАРОДНЫЕ КОНГРЕССЫ МАТЕМАТИКОВ

> Единый характер математики обусловлен внутренним существом этой науки; ведь математика — основа всего точного естествознания. А для того чтобы в совершенстве выполнить это высокое назначение, пусть в грядущем столетии она обретет гениальных мастеров и многочисленных, пылающих благородным рвением приверженцев.
>
> *Д. Гильберт*

I Международный конгресс математиков

В 1897 г. в Цюрихе состоялся I Международный конгресс математиков, собравший более 200 участников. Судя по основным докладам, в центре внимания тогда были следующие разделы математики: теория множеств (доклад Г. Кантора, Германия), теория аналитических функций (доклад А. Гурвица, Швейцария), функциональный анализ (доклад В. Вольтерры, Италия), математическая логика (доклад Дж. Пеано, Италия), связь между чистым анализом и математической физикой (доклад А. Пуанкаре, Франция), новая геометрия, теория функций комплексного переменного и теория групп (доклад Ф. Клейна, Германия). По словам Гильберта, из всех докладов наибольшее впечатление на него произвели доклады Гурвица и Пуанкаре.

Глава 20

МАТЕМАТИКА В ИЗОЛЯЦИИ. СОЗДАНИЕ КИБЕРНЕТИКИ И ЭВМ

> Приложения полезны и фактически необходимы для теории, потому что они ставят перед теорией новые вопросы. Можно сказать, что приложения и теория находятся в том же отношении, как лист и дерево: дерево держит лист, но лист питает дерево.
>
> *Ж. Адамар*

Абстрактная математика в XX в.

Для предыдущих поколений математика была тончайшим творением человеческого разума, предназначенным для исследования природы, инструментом познания мира. Математика была одновременно и «царицей», и «служанкой» естественных наук. Многие ведущие ученые-математики, работая в областях астрономии, механики, гидродинамики, электромагнетизма и теории упругости, получили несравненно более важные результаты, чем в собственно математике.

Доказательство теорем существования решений дифференциальных уравнений, в частности впервые предпринятое Коши, должно было отмести все сомнения в том, что физические проблемы, сформулированные на языке математики, допускают реше-

Глава 21

МАТЕМАТИКА В РОССИИ ПОСЛЕ 1917 г.

Умом Россию не понять,
Аршином общим не измерить:
У ней особенная стать —
В Россию можно только верить.

Ф. Тютчев

Внедрение диалектики в математику

На истории нет указателей:
«Осторожно! Крутой поворот!»
Повороты встречались жадные,
Пробирающие, как озноб.
Даже самых сильных пошатывало.
слабых — вовсе валило с ног!

Р. Рождественский

До 1917 г. президент Академии наук в России назначался императором. После Февральской революции 1917 г. Академия наук впервые избрала себе президента: им стал исполнявший до того обязанности вице-президента А.П. Карпинский.

Советская власть приняла жесткие меры для контроля над высшей школой и направлениями развития науки, предложив Академии наук сосредоточить усилия на изучении естественных производительных сил страны. Весьма критическая оценка реформ выс-

Часть II

История некоторых разделов и идей математики

При поверхностном наблюдении математика представляется плодом многих тысяч мало связанных индивидуальностей, разбросанных по континентам, векам и тысячелетиям. Но внутренняя логика ее развития гораздо больше напоминает работу одного интеллекта, непрерывно и систематически развивающего свою мысль, лишь использующего, как средство, многообразие человеческих личностей. Как в оркестре, исполняющем кем-то написанную симфонию, тема переходит от одного инструмента к другому, и когда один исполнитель вынужден прервать свою партию, ее точно, как по нотам, продолжает другой.

И.Р. Шафаревич

Глава 22

РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЯ «ВЕЛИЧИНА»

Все оттенки смысла умное число передает.
Н. Гумилев

«Величина» — одно из основных математических понятий, смысл которого с развитием математики неоднократно менялся, становясь все более общим. Первоначально понятие величины связывали с различными системами чисел (целых, положительных, рациональных, действительных, комплексных). К более широкому пониманию величин привели новые числовые системы (кватернионы, гиперкомплексные числа), а также и новые математические объекты (матрицы, тензоры, спиноры).

Целые положительные числа в Древнем мире

Единственный естественный предмет математической мысли есть целое число.
А. Пуанкаре

Арифметикой называют область знаний о числах и операциях в числовых множествах. Предметом арифметики являются рассмотрение вопросов о происхождении и развитии понятия числа, приемы и средства вычислений, исследование операций с числами различной природы, анализ математической структуры числовых мно-

Глава 23

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И «ВЕЛИКАЯ ТЕОРЕМА» ФЕРМА

> В арифметике, этой самой древней, но вечно юной ветви математики, от времени до времени возникают замечательные, своеобразные задачи: по своему содержанию они так элементарны, что их может понять каждый школьник… И вот, несмотря на всю кажущуюся простоту задачи, решение ее годами, а подчас и столетиями не поддается усилиям самых крупных ученых эпохи. Согласитесь, что это очень увлекательно.
>
> *А.Я. Хинчин*

Фрагменты истории теории чисел

В развитии математики существует общая закономерность: новые направления математики рождаются в недрах старых, основные понятия и методы оперирования проходят период «эмбрионального» развития. Затем на основе радикальных изменений применяемых методов возникает новая математическая дисциплина.

Теория чисел, изучающая свойства целых и рациональных чисел, а также свойства любых других чисел, вытекающие из приближения их рациональными числами, выросла из арифметики. От других разделов математики она отличается тем, что формулиров-

Глава 24

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

> Обладая литературой более обширной, чем алгебра и арифметика вместе взятые, и, по крайней мере, столь же обширной, как и анализ, геометрия в большей степени, чем любой другой раздел математики, является богатейшей сокровищницей интереснейших, но полузабытых вещей, которыми спешащее поколение не имеет времени насладиться.
>
> *Е.Т. Белл*

> Следует помнить, что в каком-то смысле высшая математика проще элементарной. Исследовать, например, лесную чащу пешком очень трудно, с самолета это делается проще.
>
> *У.У. Сойер*

Академик А.Д. Александров в предисловии к книге К.Е. Левитина «Геометрическая рапсодия» писал: «Своеобразие геометрии, выделяющее ее из других разделов математики, да и всех областей науки вообще, заключается в неразрывном, органическом соединении живого воображения со строгой логикой. В своей сущности и основе геометрия и есть пространственное воображение, пронизанное и организованное строгой логикой. В ней всегда присутствуют эти два неразрывно связанных элемента: наглядная картина и точная формулировка, строгий математический вывод. Там, где нет одной из этих сторон, нет и подлинной геометрии.

Глава 25

ЗАДАЧИ НА ЭКСТРЕМУМ

> Большая часть вопросов практики приводится к задачам наибольших и наименьших величин... и только решением этих задач мы можем удовлетворить требования практики, которая везде ищет самого лучшего, самого выгодного.
>
> *П.Л. Чебышев*

В жизни постоянно приходится сталкиваться с необходимостью принятия наилучшего решения (иногда говорят — оптимального) из возможных решений. Огромное число подобных проблем возникает в экономике и технике. При этом часто случается так, что полезно прибегнуть к математике.

Примерно 300 лет назад выяснилось, что некоторые специальные задачи оптимизации играют очень важную роль в естествознании, а именно обнаружилось, что многие законы природы допускают вывод их из так называемых вариационных принципов. Это означает, что истинное движение механической системы, света, электричества, жидкости, газа и т. п. можно выделить из произвольной совокупности допустимых движений благодаря тому, что они минимизируют или максимизируют некоторые величины.

В конце XVII в. было поставлено несколько конкретных экстремальных задач естественнонаучного содержания (задача о брахистохроне, задача Ньютона и др.). Потребность решать как их, так

Глава 26

ПОИСК УНИВЕРСАЛЬНЫХ ПРИНЦИПОВ

В мире не происходит ничего, в чем бы ни был виден смысл какого-нибудь максимума или минимума.

Л. Эйлер

Закон Снеллиуса

Исследуя в своей книге законы отражения света и свойства зеркал и стараясь отыскать для них логическое обоснование, Герон Александрийский высказал предположение, что «природа действует кратчайшим путем». В этих словах Герона содержится зародыш фундаментальной идеи, осознанной в XVII—XIX вв.

К началу XVIII в. математики уже располагали несколькими впечатляющими примерами того, как природа пытается «максимизировать» или «минимизировать» те или иные важные характеристики физических процессов. Было уяснено, что природе свойственно «действовать» оптимально и в механике, и в термодинамике, и в оптике — вообще всюду. Экстремальный принцип, касающийся явлений природы, был впервые четко сформулирован в оптике при попытке теоретического осмысления законов преломления света.

Если опустить шест в неподвижную гладь прозрачного озера, он покажется нам как бы изломанным. Это происходит в результате

Глава 27

ИСТОРИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ И СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

> Теория вероятностей есть, в сущности, не что иное, как здравый смысл, сведенный к исчислению: она заставляет оценить с точностью то, что справедливые умы чувствуют как бы инстинктом, часто не умея отдать себе в этом отчета.
>
> *П. Лаплас*

Теория вероятностей

Истоки теории вероятностей. Размышления о случайном (например, «золотые правила» игроков в азартные игры) имели место уже в древнейшие времена, но математические вычисления вероятностей появляются в письменных источниках начиная лишь с XV в.

Игра в кости была самой популярной азартной игрой до конца средних веков. Само слово «азарт» также относится к игре в кости, так как оно происходит от арабского слова alzar, переводимого как «игральная кость». Карточные игры стали популярными в Европе лишь в XIV в., в то время как игра в кости пользовалась успехом еще в Древнем Египте во времена I династии, позднее — в Греции, а также в Римской империи. Согласно греческой легенде игру в кости предложил Паламедей для развлечения греческих солдат, ску-

Глава 28

ОБОСНОВАНИЕ МАТЕМАТИКИ ВО ВТОРОЙ ПОЛОВИНЕ XIX В.

Наиболее замечательным результатом новейших математических методов является признание важности символической логики и точного формализма.

Б. Рассел

Необходимость обоснования математики

В начале XIX в. излюбленной областью исследования математиков вновь стала геометрия. Несмотря на существование аналитической геометрии, математики начала XIX в. считали алгебраические методы чуждыми геометрии. Для доказательства теорем чисто геометрическими методами использовали принцип непрерывности, который применяли еще Лейбниц, затем Монж, но наиболее широко Жан Виктор Понселе. Он его сформулировал так: «Если одна фигура получается из другой непрерывным преобразованием и полученная фигура не уступает по общности исходной, то можно сразу же утверждать, что любое свойство первой фигуры будет справедливо и для второй фигуры» [44, с. 188].

Математики верили своим результатам, не пытаясь их строго обосновать. Французский математик Алекси Клод Клеро писал, что все рассуждения, приводящие к результатам, заранее известным из соображений здравого смысла, считаются лишними.

Глава 29

ТАЙНЫ БЕСКОНЕЧНОСТИ

> Понятие о бесконечном множестве, войдя в состав современной математики, коренным образом революционизировало ее.
>
> *П.С. Александров*

Отношение к идее бесконечности в Древнем мире

Когда нас не спрашивают, что такое бесконечность, нам кажется, что мы знаем, что это такое. Но стоит задуматься, как выясняется, что знаем мы не так уж много.

Идея бесконечности впервые возникла как идея вечности, неограниченного во времени существования мира. По-видимому, уже египтяне и вавилоняне пришли к мысли, что течение времени не будет иметь конца. Эта идея ярко выражена в восточной притче: «Вот алмазная гора высотой в тысячу локтей. Раз в столетие прилетает птичка и точит свой клюв о гору. Когда она сточит всю гору, пройдет первое мгновение вечности» [15, с. 4]. Однако и в Египте, и в Вавилоне не было еще мысли о бесконечности пространства. Эта идея впервые возникла в Древней Греции. Греческие философы говорили: «Где бы ни стал воин, он сможет протянуть копье еще дальше» [15, с. 6]. Хотя это рассуждение доказывает лишь *неограниченность*, а не бесконечность (у окружности нет границы, хотя

Глава 30

НОВЫЙ КРИЗИС ОСНОВ МАТЕМАТИКИ

> Истин так же много, как листьев в лесу, и провозглашенная мной истина — лишь горсть листьев.
>
> *Будда Гаутама*

Основные проблемы

В математике конца XIX в. на передний план выдвинулась проблема непротиворечивости. Создание неевклидовой геометрии в значительной мере способствовало осознанию того, что геометрия является творением человека и лишь приближенно описывает происходящее в реальном мире. Это описание нельзя считать истинным потому, что оно не адекватно внутренней структуре окружающего мира и, следовательно, не обязательно непротиворечиво.

Движение за аксиоматизацию математики в конце XIX в. заставило математиков понять, сколь глубокая пропасть отделяет математику от реального мира. Аксиомы выбираются так, чтобы задаваемые ими свойства находились в согласии с теми, которые мы интуитивно с ними связываем. Но мы не можем быть уверены в том, что удалось выбрать аксиомы так, чтобы не привнести некоторое нежелательное свойство, которое может привести к противоречию.

Канторовская теория бесконечных множеств вызвала бурю протестов. Несмотря на то что эта теория нашла применение во мно-

Глава 31

ТОПОЛОГИЯ И ТЕОРИЯ ГРАФОВ

В соединении с алгеброй топология составляет общую основу математики и содействует ее единству.

А.В. Архангельский

Топология — сравнительно молодой раздел математики, возникший примерно 120 лет тому назад. Проникновение в «мир топологии» требует глубокого знания геометрии, алгебры, математического анализа и других разделов математики. Образную оценку топологии дал известный французский математик Андре Вейль, по словам которого, за душу каждого математика борются ангел топологии и дьявол абстрактной алгебры. Этой метафорой он выразил, во-первых, необычайное изящество и красоту топологии, во-вторых, то, что вся современная математика представляет собой причудливое переплетение идей топологии и алгебры. Сам термин «топология» придумал профессор Геттингенского университета Иоганн Бенедикт Листинг.

В истоках каждого раздела математики заложена основная идея, определяющая его сущность. Для топологии это идея непрерывности. Она встречается уже в математическом анализе, но не получает в нем заметного развития. Идея непрерывности выражает коренные свойства пространства и времени и имеет фундаментальное значение для познания.

Глава 32

НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ

Новое — это хорошо забытое старое.
Народная мудрость

Отношение математиков к понятию «бесконечно малая» со временем изменялось (см. гл. 13). Однако в XIX в. практически все математики отказались от точки зрения Лейбница, который считал бесконечно малые не переменными величинами, а постоянными. В XX в. была сделана попытка вернуться к той трактовке бесконечно малых, которая господствовала при создании дифференциального и интегрального исчислений. Эта попытка была предпринята американским математиком Абрахамом Робинсоном. Математический анализ, в котором рассматриваются бесконечно малые в трактовке, отличающейся от общепринятой, он назвал нестандартным анализом.

Сделаем некоторое отступление, чтобы уяснить природу бесконечно малых. Математическое описание физической реальности возможно только с известной степенью приближения. Так, планету Земля можно описать как шар, как эллипсоид и как геоид: и первое, и второе, и даже третье описания приблизительны, хотя точность их возрастает. Не надо думать, что, чем точность выше, тем описание лучше: подлинную революцию произвело именно представление о Земле как о шаре, и, скорее всего, это представление навсегда

Глава 33

ФУНКЦИЯ

Понятие функции такое же основное и первоначальное, как и понятие множества.

Ф. Хаусдорф

Развитие понятия «функция»

Развитие логического обоснования математики можно проследить на отдельных ее понятиях. Особенно характерными являются в этом отношении такие важнейшие понятия математического анализа, как понятия *функции* и *непрерывности*.

Понятие функции формировалось не сразу. Древние греки не включали в математику понятия изменения и движения. Это казалось им несовместимым со строго логической системой из-за вскрытых Зеноном противоречий.

Новая математика зародилась тогда, когда Декарт стал рассматривать изменение алгебраического выражения в зависимости от непрерывного изменения входящих в него величин. В применении к изучению кривых рассматривалась зависимость ординаты от абсциссы. Однако, когда изучались лишь частные случаи, не было необходимости давать этой зависимости строгое определение и даже особое название. Но с созданием математического анализа с его обобщающими методами стало возможно изучать общие случаи

Глава 34

ПОРЯДОК И ХАОС. СОЗДАНИЕ ФРАКТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

> Высшее назначение математики — находить порядок в хаосе, который нас окружает.
>
> *Н. Винер*

Порядок и хаос

Многие понятия, некогда бывшие достоянием узкого круга специалистов, теперь становятся междисциплинарными и общезначимыми, далеко выходя за рамки тех специальных задач, в связи с которыми они первоначально возникли. Так, мало известное в прошлом за пределами гидродинамики понятие «турбулентность» в настоящее время представляет общенаучный интерес. Слово «хаос» перестало быть синонимом отсутствия порядка и обрело структуру, подобно тому как перестало быть синонимом понятия «ничто» словосочетание «физический вакуум».

В наше время уже недостаточно открыть основные законы и понять, как работает мир в принципе. Все более и более важным становится выяснение того, каким способом эти законы проявляются в реальности.

До недавнего времени, до разработки теории турбулентности и создания фрактальной геометрии, математика описывала строго

Глава 35

МАТЕМАТИКА — ВСЕОБЩИЙ ЯЗЫК НАУКИ

Математика, эта «царица и служанка» всех остальных наук, всегда и везде оказывалась впереди и, подчас подвергаясь насмешкам, упрекам в ее оторванности от жизни, отвлеченности, сухости и т. п., прокладывала новые пути человеческому знанию.

С.Л. Соболев

Математические модели. Особенности математического языка

В любой науке в той или иной степени приходится исследовать не только качественные особенности объектов, явлений или процессов, но и их пространственные и количественные характеристики, для изучения которых необходим *общий метод*. Этот общий для разных наук метод разрабатывает математика.

Каждая наука, пользуясь математическими методами, строит определенную схему — представление об изучаемом объекте. Эту схему — представление в виде какой-то формулы, уравнения или в виде геометрического образа — называют *математической моделью* изучаемого объекта. Затем с помощью модели делают логические выводы, справедливость которых проверяют на практике,

Глава 36

ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ И ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

Причину же этих свойств силы тяжести я до сих пор не мог вывести из явлений, гипотез же я не измышляю... Довольно того, что тяготение на самом деле существует и действует согласно изложенным нами законам и вполне достаточно для объяснения всех движений небесных тел и моря.

И. Ньютон

Закон всемирного тяготения

После установления законов Кеплера и астрономических открытий Галилея многие ученые заинтересовались астрономией. В 1666 г. в одном из писем Ньютон сообщил о найденном им законе, управляющем падением тел и движением планет. Применив свою формулу к движению Луны, Ньютон признал свое поражение: астрономы фиксировали местонахождение Луны вовсе не там, где следовало ей быть по его расчетам. Через 16 лет выяснилось, что значение радиуса Земли, которым Ньютон пользовался при расчетах, было неверным. Повторив вычисления с более точным значением радиуса, Ньютон получил прекрасное совпадение рас-

Г л а в а 37

МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА В XX В.

Можно отметить разницу между ходом мышления физика, который ищет краткости, и ходом мышления математика, который стремится достичь точности.

А. Фуше

Сопоставление математики и физики

Американский физик-теоретик, один из основателей квантовой электродинамики, Нобелевский лауреат по физике 1965 г. Ричард Филлипс Фейнман в цикле лекций «Характер физических законов» писал, что возможны два взгляда на математику. Для удобства один из них он назвал вавилонской традицией, а другой — греческой традицией. В вавилонских школах математики ученик решал огромное множество примеров, пока не улавливал общего правила. Он подробно знал геометрию, множество свойств круга, теорему Пифагора, формулы для площадей квадратов и треугольников; кроме того, существовали некоторые способы выводить одно из другого. Имелись числовые таблицы, с помощью которых можно было решать сложные уравнения. Все было подготовлено для того, чтобы проводить вычисления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Тот, кто не знает математики, не может узнать никакой другой науки и даже не может обнаружить своего невежества.

Р. Бэкон

Ни одно человеческое исследование не может назваться истинной наукой, если оно не прошло через математические доказательства.

Леонардо да Винчи

Научный метод познания базируется на использовании интеллекта и логики. Они являются орудиями упорядочения и систематизации знания, которое человек получает через такие мало понимаемые нами каналы познания, как интуиция и озарение.

Почему математика успешно применяется при описании физически реальных явлений? Почему в тех случаях, когда физическое явление понято нами и мы приняли соответствующие аксиомы, сотни следствий, полученных из аксиом, оказываются столь же применимыми к реальному миру, как и сами аксиомы? Почему математика эффективна и при описании тех физических явлений, которые не понятны нам?

Ученым XVI—XVII вв. ответы на эти вопросы казались простыми и ясными. Полностью разделяя убежденность древних греков в том, что мир устроен на математических принципах, и принимая убежденность Церкви, что мир создан Богом, они видели в математике путь к познанию истины о природе.

Суть того, во что непоколебимо верили Декарт, Кеплер, Галилей, Ньютон, Лейбниц и многие другие основатели современной математики, сводится к следующему: *природе внутренне присуща некая скрытая гармония, которая отражается в наших умах в ви-*

де простых математических законов. Именно в силу этой гармонии наблюдение в сочетании с математическим анализом позволяет предсказывать явления природы.

В конце XVIII в. математика представляла собой как бы величественное двухтысячелетнее дерево с могучими корнями и мощными ветвями, прочно стоящее на почве реальности, возвышающееся над всеми остальными областями знания. Убеждение в том, что природа основана на математических принципах, было прочно как никогда. Задача математиков состояла в том, чтобы открывать эти принципы и познавать законы, управляющие Вселенной, и сама математика считалась инструментом, как нельзя лучше приспособленным для решения этой задачи.

В XIX и XX столетиях роль математики в «упорядочении» окружающего мира и овладении природой возрастала невероятно быстрыми темпами. Существенно увеличивалась точность, с которой математики могли описывать и предсказывать явления природы.

Математика подарила человечеству много блестящих открытий. Это прекрасно согласующаяся с повседневным опытом евклидова геометрия, необычайно точная гелиоцентрическая теория Коперника и Кеплера, величественная и всеохватывающая механика Галилея, Ньютона, Лагранжа и Лапласа. Это физически необъяснимая, но имеющая весьма широкую сферу приложений теория электромагнетизма Максвелла и теория относительности Эйнштейна с ее тонкими и необычными выводами. Это теория порядка и хаоса и фрактальная геометрия, позволяющая лучше понять окружающую нас красоту природы. Математика позволила многое понять в строении атома. Все эти блестящие достижения опираются на математические идеи и математические рассуждения.

Математика играет роль стержня естественнонаучных теорий, и ее приложения в XIX—XX вв. являются еще более удивительными, чем все ее прежние успехи, когда математики оперировали понятиями, навеянными непосредственно физическими явлениями. Хотя было бы неверно приписывать одной лишь математике такие достижения современной науки, как радио, телевидение, самолет, телефон, телеграф, высококачественная звукозаписывающая аппаратура, рентгеновские установки, транзисторы, компьютеры, источники атомной энергии. Вклад в эти достижения представителей экспериментальной науки не менее фундаментален, чем вклад математиков.

Математика является самым могущественным созданным человеком инструментом. Она позволяет достичь определенного понимания сложного и разнообразного мира природных явлений. В 1900 г., обращаясь к участникам II Международного конгресса математиков, Гильберт заявил: «Математика — основа всего точного естествознания» [82, с. 64].

Современный мир неожиданно обнаружил, что математика уверенно расположилась в самых разных его частях и уголках. Многие науки, по существу, представляют собой свод математических теорий, скупо приправленных физическими фактами. Несмотря на то что вторжение математики продолжается — и с все возрастающей интенсивностью, — удивление по этому поводу скорее даже убывает: математическая экспансия стала привычной. Сейчас уже все смирились со словосочетаниями: «математическая биология», «математическая лингвистика», «математическая экономика», «математическая психология»; и какую дисциплину ни взять, вряд ли кому-нибудь покажется невозможным присоединение к ее наименованию определения «математическая».

Распространение математики вширь сопровождается ее проникновением вглубь; математика занимает теперь видное положение в жизни общества. Тем не менее повсеместное проникновение математики некоторым кажется загадочным, а некоторым — подозрительным. В самом деле, не вызывает сомнений право на всеобщее признание, скажем, физики или химии: физика открывает нам новые мощные источники энергии и новые средства быстрой связи, химия создает искусственные ткани, а сейчас «покушается» и на создание искусственной пищи. Не удивительно, что эти науки прочно и почетно вошли в нашу жизнь. Несмотря на то что, например, при обучении языкознанию пользуются физическими приборами для исследования устной речи, никто же не говорит о «физической лингвистике», тогда как термин «математическая лингвистика» уже давно получил права гражданства.

Так что же дает людям математика, такая теоретическая наука, которая не открывает ни новых веществ, как химия, ни новых источников энергии, как физика? И почему появление в какой-либо отрасли науки математических методов исследования или хотя бы просто математического осмысления соответствующей системы понятий и фактов всегда означает и достижение этой отраслью определенного уровня зрелости, и начало нового этапа в ее дальнейшем развитии?

В настоящее время имеется более 6 тыс. профессий, успешное овладение которыми требует хорошего знания математики, устойчивых навыков ее использования. И с каждым годом число таких профессий растет. Поэтому без настойчивого изучения математических законов нельзя стать хорошим специалистом.

Всем сказанным не исчерпывается роль математики в жизни общества. Г. Вейль писал: «Математика играет весьма существенную роль в формировании нашего духовного облика. Занятие математикой — подобно мифотворчеству, литературе или музыке — это одна из наиболее присущих человеку областей его творческой деятельности, в которой проявляется его человеческая сущность, стремление к интеллектуальной сфере жизни, являющейся одним из проявлений мировой гармонии»[115, с. 9]. Ему же принадлежат слова: «Несмотря на почтенный возраст, математика отнюдь не страдает прогрессирующим склерозом, вызванным все возрастающей сложностью; напротив, она продолжает активно жить, питаясь теми живительными соками, которые извлекают ее глубокие корни из разума и природы»

Математика стала главным продуктом человеческого разума. Именно математика воплощает в себе звено, наиболее эффективно связывающее реальный мир с миром чувственных восприятий, и сегодня она остается драгоценнейшим сокровищем человеческого разума, которое следует всячески оберегать. На протяжении долгого времени математика находилась в авангарде человеческой мысли, и, несомненно, она сохранит передовые позиции и в будущем.

Области приложений математики стремительно расширяются. Человеку, желающему быть в курсе всего нового в математике, пришлось бы прочитывать ежедневно около 15 статей, весьма больших по объему и содержащих сложные математические выкладки.

Математические знания и уровень их применения в различных науках за последние годы в значительной степени изменились. Теория меры используется (нетривиально) в экономической географии и теоретической экономике. Алгебраическая геометрия взаимодействует с физикой. Лемма Минковского, теория кодирования и структура воды встречаются в теории упаковки и покрытия. Теория гомотопий оказывается полезной в математическом программировании, при изучении квантовых полей и дефектов кристаллов. Этот список можно продолжать очень долго.

Открытия, которые делают математики, столь разнообразны по своему характеру, что однажды Гильберт, то ли в отчаянии, то ли в шутку, сказал, что математика — это то, что подразумевают под этим компетентные люди. Казалось, что только такое широкое определение может охватить все, что относится к математике. Математики решают проблемы, которые в прошлом не считались математическими, и трудно представить, чем они еще станут заниматься в будущем.

Несомненно, роль математики в естественных науках будет возрастать по мере их развития. Кроме того, в будущем в математике возникнут новые структуры, которые откроют новые возможности формализовать не только естественные науки, но в какой-то мере, может быть, и искусство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азимов А.* Вид с высоты: Пер. с англ. М.: Мир, 1965.
2. *Аристотель.* Сочинения: В 4 т. М.: Мысль, 1976; 1981. Т.1; Т.3.
3. *Башмакова И.Г.* Пьер Ферма // Замечательные ученые / Под ред. С.П. Капицы. М.: Наука, 1980.
4. *Беркли Дж.* Сочинения: Пер. с англ. М.: Мысль, 1978.
5. *Бирюков Б.В.* Г. Вейль и методические проблемы науки // Вейль Г. Симметрия: Пер. с англ. М.: Наука, 1968.
6. *Богомолов А.Н., Роженко Н.М.* Опыт «внедрения» диалектики в математику в конце 20-х — начале 30-х гг. // Вопр. философии. 1991. № 4.
7. *Болтянский В.Г., Ефремович В.А.* Наглядная топология. М.: Наука, 1982.
8. *Большой* энциклопедический словарь. М.: Большая Российская энциклопедия, 1997.
9. *Бурбаки Н.* Теория множеств: Пер. с фр. М.: Мир, 1965.
10. *Ван-дер-Варден Б.А.* Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции: Пер. с англ. М.: 1959.
11. Введение в криптографию / Под общ. ред. В.В. Ященко. М.: МЦНМО, 1998.
12. *Вейль Г.* Математическое мышление: Пер. с нем. М.: Наука, 1989.
13. *Виленкин Н.Я.* Популярная комбинаторика. М.: Наука, 1975.
14. *Виленкин Н.Я.* Рассказы о множествах. М.: Наука, 1969.
15. *Виленкин Н.Я.* Тайны бесконечности (Зенон, Демокрит, Архимед) // Квант. 1970. № 12.
16. *Виленкин Н.Я., Лишевский В.П.* Нильс Хенрик Абель // Замечательные ученые / Под ред. С.П. Капицы. М.: Наука, 1980.
17. *Виленкин Н.Я., Лишевский В.П.* Софья Васильевна Ковалевская // Замечательные ученые / Под ред. С.П. Капицы. М.: Наука, 1980.
18. *Виленкин Н.Я., Лишевский В.П.* Эварист Галуа // Замечательные ученые / Под ред. С.П. Капицы. М.: Наука, 1980.
19. *Воронцов-Вельяминов Б.* Лаплас. М.: Журн.-газ. об-ние, 1937.
20. *Галилей Г.* Избранные труды: В 2 т. М.: Наука, 1964.

21. *Галкин С.В.* Целенаправленные системы в физическо-духовном мире. (Мир, жизнь, разум). М.: Анвис К, 1999.
22. *Гарднер М.* Есть идея!: Пер. с англ. М.: Мир, 1982.
23. *Гарднер М.* Математические новеллы: Пер. с англ. М.: Мир, 1974.
24. *Гильберт Д.* Основания геометрии: Пер. с нем. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948.
25. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия: Пер. с нем. М.: Наука, 1981.
26. *Гиндикин С.Г.* Рассказы о физиках и математиках. М.: Наука, 1985.
27. *Глейзер Г.И.* История математики в школе. М.: Просвещение, 1982.
28. *Гнеденко Б.В.* Александр Яковлевич Хинчин. К 100-летию со дня рождения выдающего ученого и педагога // Квант. 1994. № 6.
29. *Гнеденко Б.В.* О математике Страны Советов // Квант. 1987. № 11.
30. *Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж.* Пути и лабиринты. Очерки по истории математики: Пер. с фр. М.: Мир, 1986.
31. *Данилов Ю.А., Смородинский Я.А.* Иоганн Кеплер: от «Мистерии» до «Гармонии» // Успехи физ. наук. 1973. Т. 109, вып. 1.
32. *Декарт Р.* Рассуждения о методе с приложениями. Диоптрика. Метеоры. Геометрия. М.: Наука, 1953. (Классики науки).
33. *Дело* академика Н.Н. Лузина (архивные материалы) / С.С. Демидов, А.И. Володарский, Т.А. Токарева и др. СПб.: РХГИ, 1999.
34. *Делоне Б.Н.* Леонард Эйлер // Замечательные ученые / Под ред. С.П. Капицы. М.: Наука, 1980.
35. *Димитриенко Ю.И.* Тензорное исчисление. М.: Высш. шк., 2001.
36. *Дюкас Э., Хофман Б.* Альберт Эйнштейн как человек // Вопр. философии. 1991. № 1.
37. *Евклид.* Начала. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948.
38. *Жизнеописание* Л.С. Понтрягина, математика, составленное им самим. М.: ИЧП «Прима В», 1998.
39. *Интервью* с С.П. Курдюмовым // Вопр. философии. 1991. № 6.
40. *Кант И.* Сочинения: В 6 т.: Пер. с нем. М.: Мысль, 1966. Т. 6.
41. *Кантор И.Л., Солодовников А.С.* Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973.
42. *Катасонов В.Н.* Аналитическая геометрия Декарта и проблемы философии техники // Вопр. философии. 1989. № 12.
43. *Клайн М.* Математика. Поиск истины: Пер. с англ. М.: Мир, 1988.
44. *Клайн М.* Математика. Утрата определенности: Пер. с англ. М.: Мир, 1984.
45. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии: В 2 т.: Пер. с нем. М.: Наука, 1989. Т. 1.
46. *Климишин И.А.* Календарь и хронология. М.: Наука, 1985.
47. *Ковалевская С.В.* Воспоминания. М.: Наука, 1974.
48. *Кованцев Н.И.* Математика и романтика. Киев: Выща шк., 1976.

49. *Кокстер Х.* Введение в геометрию: Пер. с англ. М.: Наука, 1966.
50. *Колмогоров А.Н.* Математика в ее историческом развитии. М.: Наука, 1991.
51. *Коперник Н.* О вращении небесных сфер. Малый комментарий. Послания против Вернера. Упсальская запись: Пер. с пол. М.: Наука, 1964.
52. *Космодемьянский А.А.* Николай Егорович Жуковский. М.: Наука, 1984.
53. *Кочина П.Я.* Воспоминания. М.: Наука, 1974.
54. *Лаврентьев М.А.* Кумулятивный заряд и принцип его работы // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, вып. 4.
55. *Лаврентьев М.А.* Николай Николаевич Лузин // Успехи мат. наук. 1974. Т. 29, вып. 5 (179).
56. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
57. *Левитин К.Е.* Геометрическая рапсодия. М.: Знание, 1984.
58. *Лиман М.М.* Школьникам о математике и математиках. М.: Просвещение, 1981.
59. *Лишевский В.П.* Иоганн Кеплер // Замечательные ученые / Под ред. С.П. Капицы. М.: Наука, 1980.
60. *Лосев А.Ф., Тахэ-Годи А.А.* Платон. Аристотель. М.: Мол. гвардия, 1993.
61. *Лурье С.Я.* Архимед. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1945.
62. *Максвелл Дж. К.* Избранные сочинения по теории электромагнитного поля: Пер. с англ. М.: Гостехтеоретиздат, 1954.
63. *Маркеев А.П.* О задаче трех тел и ее точных решениях // Империя математики. 2000. № 1.
64. *Математика* в Петербургском–Ленинградском университете / Под ред. В.И. Смирнова. Л.: Наука, 1970.
65. *Математическая* энциклопедия / Гл. ред. И.М. Виноградов: В 5 т. М.: Сов. энцикл., 1979.
66. *Мигдал А.С.* Физика и философия // Вопр. философии. 1990. № 1.
67. *Моисеев Н.Н.* Восхождение к разуму. М.: ИздАТ, 1993.
68. *Немировский Л.Н.* Мистическая практика как способ познания. М.: Изд-во МИФИ, 1993.
69. *Никифоровский В.А.* Из истории алгебры XVI—XVII вв. М.: Наука, 1979.
70. *Никифоровский В.А.* Путь к интегралу. М.: Наука, 1985.
71. *Ньютон И.* Всеобщая арифметика, или Книга об арифметических синтезе и анализе: Пер. с англ. М.: Наука, 1998.
72. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии // Собрание трудов академика А.Н. Крылова: В 7 т. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936. Т. 7.

73. *Ньютон И.* Оптика, или Трактат об отражениях, преломлениях, изгибаниях и цветах света. М.: Гостехтеоретиздат, 1954.
74. *Ожигова Е.П.* Шарль Эрмит. Л.: Наука, 1982.
75. *Пайтген Х.О., Рихтер П.Х.* Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем: Пер. с англ. М.: Мир, 1993.
76. *Парадоксы* бесконечного. Минск: В.П. Ильин, 2000.
77. *Писаревский Б.М., Харин В.Т.* Беседы о математиках и математике. М.: Нефть и газ, 1998.
78. *Планк М.* Религия и естествознание // Вопр. философии. 1990. № 8.
79. *Последнее* интервью с А.Н. Колмогоровым // Империя математики. 2000. № 1.
80. *Пригожин И.* Философия нестабильности // Вопр. философии. 1991. № 6.
81. *Пригожин И., Стенгерс И.* Порядок из хаоса. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
82. *Проблемы* Гильберта. М.: Наука, 2000.
83. *Реньи А.* Трилогия о математике: Пер. с венг. М.: Мир, 1980.
84. *Рид К.* Гильберт: Пер. с англ. М.: Наука, 1970.
85. *Розенбергер Ф.* История физики: Пер. с англ. М.; Л.: ОНТИ, 1937. Ч. 2.
86. *Розенфельд Б.А.* Откуда произошли названия геометрических фигур? // Квант. 1970. № 1.
87. *Рыбников К.А.* История математики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974.
88. *Садовничий В.А.* Роль математики в развитии человечества. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1995.
89. *Секей Г.* Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике: Пер с венг. М.: Мир, 1990.
90. *Сингх С.* Великая теорема Ферма. М.: Изд-во Моск. центра непрывн. мат. образования, 2000.
91. *Смайлс С.В.* Жизнь и труд. СПб.; М.: Товарищество О. Вольф, 1900.
92. *Смородинский Я.А.* Николай Коперник // Замечательные ученые / Под ред. С.П. Капицы. М.: Наука, 1980.
93. *Сойер У.У.* Прелюдия к математике: Пер. с англ. М.: Просвещение, 1972.
94. *Стройк Д.Я.* Краткий очерк истории математики: Пер. с англ. М.: Наука, 1978.
95. *Сухотин А.К.* Превратности научных идей. М.: Мол. гвардия. 1991.
96. *Тихомиров В.М.* Андрей Николаевич Колмогоров // Квант. 1993. № 3/4.
97. *Тихомиров В.М.* Рассказы о максимумах и минимумах. М.: Наука, 1986.
98. *Успенский В.А.* Что такое нестандартный анализ? М.: Наука, 1987.
99. *Успенский П.Д.* Новая модель Вселенной: Пер. с англ. СПб.: Изд-во Чернышева, 1993.

100. *Фейнман Р.* Характер физических законов: Пер. с англ.. М.: Наука, 1968.
101. *Филиппов М.М.* Лейбниц, его жизнь и деятельность: общественная, научная и философская. СПб., 1893.
102. *Фрейман Л.С.* Творцы высшей математики. М.: Наука, 1968.
103. *Фридман В.Я.* Теория кентавров и структура реальности. М., 1996.
104. *Халамайзер А.Я.* Памяти Н.Н. Лузина // Математика в школе. 1984. № 2.
105. *Холл М.П.* Энциклопедическое изложение масонской, герметической, каббалистической и розенкрейцеровской символической философии: Пер. с англ. Новосибирск: ВО «Наука», 1993.
106. *Хрестоматия* по истории математики / Под ред. А.П. Юшкевича. М.: Просвещение, 1977.
107. *Цейтен Г.* История математики в XVI и XVII веках. М.; Л.: ОНТИ, 1933.
108. *Чанышев А.Н.* Курс лекций по древней и средневековой философии. М.: Высш. шк., 1991.
109. *Чистяков В.Д.* Рассказы о математиках. Минск: Вышэйш. шк., 1966.
110. *Чистяков В.Д.* Старинные задачи. Минск.: Вышэйш. шк., 1966.
111. *Шаль М.* История геометрии: В 2 т. М.: Моск. мат. о-во, 1883.
112. *Шюре Э.* Великие посвященные. Очерк эзотеризма религий: Пер. с фр. Калуга: Тип. губерн. зем. управы, 1914.
113. *Энциклопедия* для детей. Т. 11: Математика. М.: Аванта+, 1998.
114. *Энциклопедия* нумерологии. СПб.: ИПД «ВББ», 1998.
115. *Яглом И.М.* Герман Вейль и идея симметрии // Вейль Г. Симметрия: Пер. с англ. М.: Наука, 1968.
116. *Яковлев А.Я.* Леонард Эйлер. М.: Просвещение, 1983.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ*

*В указатель внесены имена только тех творцов науки, которые оказали существенное влияние на развитие математики.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Научное издание

Панов Владилен Федорович

МАТЕМАТИКА ДРЕВНЯЯ И ЮНАЯ

Редактор *Е.К. Кошелева*
Художник *С.С. Водчиц*
Корректор *Е.В. Авалова*
Компьютерная верстка *В.И. Товстоног*

Оригинал-макет подготовлен в издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.02.953.Д.005683.09.04 от 13.06.2004 г.

Подписано в печать 23.06.2006. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печ. л. 40,5. Уч.-изд. л. 40,0.
Тираж 3000 экз. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская, 5.
Отпечатано в ОАО «Рыбинский Дом печати».
152901, г. Рыбинск, ул. Чкалова, д. 8.