10. 39

02. 12. 2018 г.

Олимпиадная работа по математике
ученика 10 класса гимназии №2
Копёткина Бориса Александровича.
Дата рождения: 05. 11. 2002
Учитель: Желтышева Валерья Валерьевна.

1	2	3	4	5	Итого
5	2	7	7б	4	25

Ю.39

№1.

$F(x) = x^2 + 3px + 2p^2 - 1.$

Выясним, при каких значениях параметра p функция $F(x) = x^2 + 3px + 2p^2 - 1$ принимает отрицательные значения:

$x^2 + 3px + 2p^2 - 1 < 0$

Разложим левую часть неравенства на множители, используя формулу для разложения квадратного трёхчлена на множители:

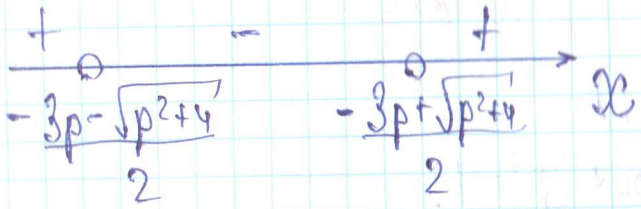
$x^2 + 3px + 2p^2 - 1 = 0.$

$D = 9p^2 - 4(2p^2 - 1) = p^2 + 4$ (Дискриминант всегда больше нуля, поэтому данное квадратное уравнение всегда имеет два корня).

$x_{1,2} = \frac{-3p \pm \sqrt{p^2+4}}{2}$

Тогда

$$\left(x-\frac{-3p+\sqrt{p^2+4}}{2}\right)\left(x-\frac{-3p-\sqrt{p^2+4}}{2}\right)<0$$



Следовательно, $F(x)<0$ при $x\in\left(\frac{-3p-\sqrt{p^2+4}}{2};\ \frac{-3p+\sqrt{p^2+4}}{2}\right)$.

В то же время $F(x)<0$ в интервале $\in(0;1)$, поэтому

$$\frac{-3p-\sqrt{p^2+4}}{2}=0\ ;\qquad \frac{-3p+\sqrt{p^2+4}}{2}=1.$$

$-3p=\sqrt{p^2+4}$

$9p^2=p^2+4$

$8p^2=4$

$p=\pm\sqrt{0,5}$.

($\sqrt{0,5}$ - ложный корень).

$-3p+\sqrt{p^2+4}=2$

$3p+2=\sqrt{p^2+4}$

$p^2+4=9p^2+12p+4$

$-8p^2-12p=0$.

$-p(p+1,5)=0$

$p(p+1,5)=0$.

$p=0$ или $p=-1,5$

($p=-1,5$ - ложный корень).

Итак, $F(x)<0$ при параметре p наибольшем, равном $p=0$.

Ответ: наибольшее значение параметра p равно 0.

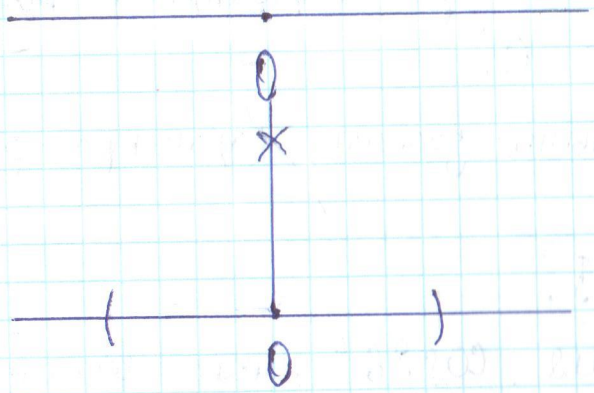
№5

Для вычисления $\cos 36^\circ$ можно воспользоваться клеточным сечением листка тетради. Для построения угла в 36° необходимо поделить пополам развёрнутый угол, получив прямой. Затем прямой угол делится пополам, причём биссектриса данного прямого угла (все вышеперечисленные операции выполняются с помощью циркуля и линейки). После этого, зная, что биссектриса угла пойдёт через вершины квадратиков тетрадного листка, отметим точку, расположенную на высоте 5 клеток от

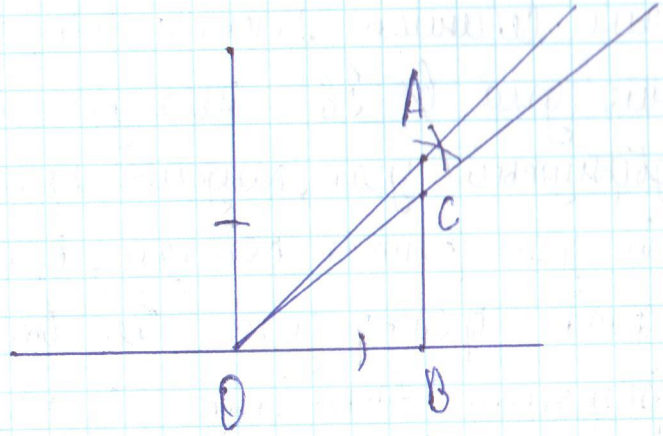
стороны развёрнутого угла (см. рис.). Пусть это точка A.

а)

б)



в)



После данного шага заметим, что биссектриса подшла прямой угол на два угла по 45°, а угол 36° составляет $\frac{4}{5}$ угла 45°.

Поэтому, опустим перпендикуляр из т. A на сторону развёрнутого угла (основание перпендикуляра — т. B), сторона $AB = 5$ клеток. Тогда для получения угла в 36° возьмём т. C так, что $AC = \frac{1}{5} AB$. Соединим т. O с т. C и получим угол в 36° (т.к. от угла в 45° взяли одну пятую часть).

Итак, в $\triangle OCB$ $OB = 5$; $BC = 4$, тогда, по теореме Пифагора, $OC = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$.

Следовательно, $\cos 36^\circ = \frac{OB}{OC} = \frac{5}{\sqrt{41}} = \frac{5\sqrt{41}}{41}$.

+5

Ответ: $\cos 36^\circ = \frac{5\sqrt{41}}{41}$.

№4

а) Рассмотрим три случая, когда в каждом из случаев за рулём сидит один из трёх человек:

1) Место водителя занимает один из трёх

человек, имеющий право сидеть за рулём, к примеру:

Тогда остальные 6 человек могут усесться 6! способами.

2) Место водителя занимает второй из трёх человек, имеющий право это делать: в данном случае расположение остальных шести человек также определяется 6! способами.

3) При нахождении за рулём третьего из трёх человек с автомобильными правами позволит оставшимся шести рассесться также 6! способами.

Итак, семь человек могут усесться в эту машину $6!+6!+6! = 720\cdot 3 = 2160$ способами при условии, что занять место водителя могут только трое из них.

Ответ: 2160 способов.

7б

№3.

n^4+4, где $n \in N$.

Пусть число $n^4+4 = m$, где m – простое число (по условию).

Преобразуем левую часть данного равенства:

$$n^4+4 = n^4+4n^2+4-4n^2 = (n^2+2)^2-4n^2 = (n^2+2n+2)(n^2-2n+2).$$

Итак,

$$m = (n^2+2n+2)(n^2-2n+2).$$

Выражения n^2+2n+2 и n^2-2n+2 при любых n больше нуля (поскольку дискриминанты в них меньше нуля, а коэффициент a перед n^2 равен 1), поэтому m – простое число при равенстве одного из данных выражений единице, а другого равенства – числу m, потому как делителями простого числа m являются единица и само число m (к примеру, $17 = 1\cdot 17$; $19 = 1\cdot 19$; $23 = 1\cdot 23$ и т.д.).

Итак,

а) $n^2+2n+2=1.$

$n^2+2n+1=0.$

$(n+1)^2=0.$

$n=-1$ (но: $n\in N$).

б) $n^2-2n+2=1.$

$n^2-2n+1=0.$

$(n-1)^2=0.$

$n=1.$ – условие $n\in N$ выполнено.

Следовательно, число n^4+4 – простое при единственном $n\in N$, а именно $n=1$.

<u>Ответ:</u> при $n=1$.

№2.

$$\overset{1}{7}+\overset{2}{77}+\overset{3}{777}+\overset{4}{7777}+\ldots+7\underbrace{7\ldots7}_{n}=?$$

$(n+1)$ – номер по порядку

Закономерность: порядковый номер слагаемого – количество цифр в числе (к примеру, число 7777 идёт на четвёртом месте и имеет 4 цифры), тогда в последнем слагаемом $n+1$ цифр, т.е. всего в сумме $n+1$ слагаемых.

Другая закономерность: числа увеличиваются на 70, 700, 7000 и т.д., т.е. сумму данных слагаемых можно представить как арифметическую прогрессию, в которой разность прогрессии d изменяется в одинаковое количество раз (т.е. в 10 раз).

Итак,

$$S_{n+1}=\frac{2a_1+d\cdot n}{2}\cdot(n+1)=\frac{14+d\cdot n}{2}(n+1),$$

т.к. в прогрессии $n+1$ слагаемых.

$d_1=70$, $q=10$, тогда $d_n=d_1\cdot q^{n-1}=$
$=70\cdot10^{n-1}$.

Следовательно, $d=\frac{d_1+d_n}{2}$ (берём средние значения d), тогда

$$S_{n+1}=\frac{14+\frac{70\cdot10^{n-1}}{2}\cdot n}{2}(n+1)=$$

$$=\left(7+\frac{70\cdot10^{n-1}}{4}\cdot n\right)(n+1)=$$

$$= 7n + 7 + \frac{70 \cdot 10^{n-1}}{4} \cdot n^2 + \frac{70 \cdot 10^{n-1}}{4} \cdot n.$$

Итак, сумма равна $S_{n+1} = \left(7 + \frac{70 \cdot 10^{n-1}}{4} \cdot n\right)(n+1).$

2б

<u>Ответ:</u> $S_{n+1} = \left(7 + \frac{70 \cdot 10^{n-1}}{4} \cdot n\right)(n+1).$