11.27

1	2	3	4	5	Итого
7	3	6	3	7	26

Алексеева ← Туйнанова Четверина Екатеринчева Любанова

№ 5.

Рассмотрим 2 ~~соседних~~ любых стола. По условию при любой удачной рассадке за любым столом сидит ровно 5 человек. Отсюда следует, что ни один человек из первого стола не может дружить со всеми представителями второго стола (иначе его можно посадить за 2 стол, посадка будет оставаться удачной, но за первым столом будет 4 человека, за 2 - 6 - противоречит условию). Тогда максимально ~~1 пред~~ человек, сидящий за 1 столом, может дружить с 4 людьми другого стола. Это правило распространяется на любые 2 стола из данных 4.

16.11.2019г

Олимпиадная работа по мате
ученицы 11 класса школы № 44
Панковой Марии Александровны
Дата рождения: 23.10.2002г.
Учитель: Архипова Лидия Ана
евна.

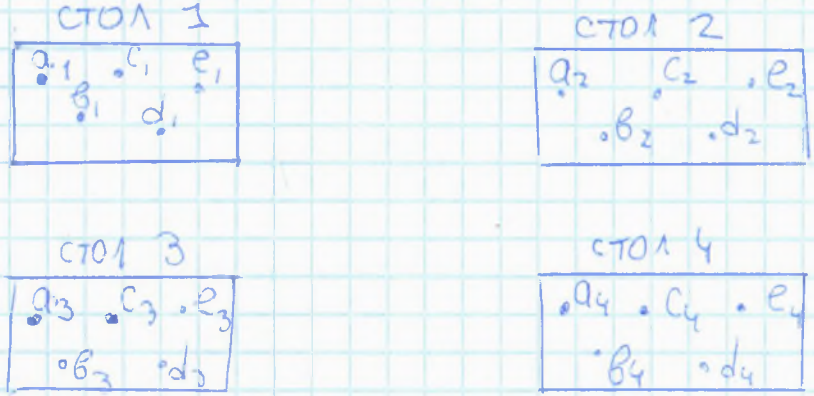
Также надо отметить, что двое дружащих людей из-за одного стола не могут дружить с одними и теми же четырьмя людьми из-за другого стола, иначе можно сделать удачную рассадку, в которой за ~~это~~ одним из столов будет 6 человек, что противоречит условию. Способов выбрать 4 человека из данных 5: $C_5^4 = \frac{5!}{1 \cdot 4!} = 5$.

Тогда каждый человек из данного стола может дружить с 4 представителями каждого другого стола. (Т.к. число способов выбрать разный набор в 4 человека из 5 людей равно 5, т.е. у каждого из 5 человек за данным столом будет разный набор из 4 людей, с кем он дружит, за 2, 3 и 4 столом).

Тогда у каждого человека максимально может быть $4+4+4+4 = 16$ друзей. 75

Тогда всего дружащих пар: $\frac{16 \cdot 20}{2} = 160$.

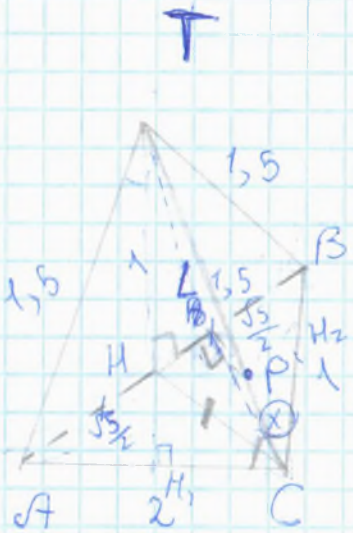
Осталось привести пример подобной рассадки и возможного числа друзей.



a_1, a_2, a_3, a_4 - четвёрка взаимно не дружащих людей (аналогично с b, c, d и e). У них одинаковые наборы друзей. Но при этом, т.к. (a_1, a_2, a_3, a_4) они не дружат, мы не можем составить рассадку, в которой за одним столом сидит более 5 человек, т.е. мы не можем больше ввести ещё одну дружащую пару. Таким образом, у каждого человека есть 3, с кем он не дружит, (т.е. с 16 людьми) а с остальными он дружит. Число дружащих пар равно 160, что и требовалось доказать.

Ответ: 160.

№4.



Дано:

TABC - пирамида

△ABC - прямоугольной

AC=2

BC=1

TA=TB=TC=1,5

Найти:

найти S сеч.

Решение:

1. Сечение (пирамиды) проходящее через гипотенузу AB основания AB, будет являться треугольником,
2. Вершина которого - A и B соответственно, а
3. Вершина принадлежит ребру TC.

Построим треугольник THC, где TH - высота, биссектриса и медиана в равнобедренном △ATB.

По теореме Пифагора в △ACB: $AB=\sqrt{5}$.

Тогда $AH=HB=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Найдем высоту TH.

По теореме Пифагора $TH=\sqrt{2{,}25-1{,}25}=1$.

Теперь построим CL - высоту △ACB.

$CL\cdot AB=AC\cdot CB$ (из площади треугольника).

Тогда $CL=\frac{2\cdot 1}{\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$.

Когда мы будем проводить сечения и опускать высоту из вершины, принадлежащей TC, на AB, то она будет опускаться в точку, принадлежащую HL, т.к. мы рассмотрим 2 крайних случая сечения.

Площадь сечения зависит только от этой высоты, т.к. основание треугольника будет оставаться постоянным ($AB=\sqrt{5}$).

Тогда надо определить, какая из точек отрезка HL наименее удалена от прямой TC.

Найдем длину высоты, опускаемой на AB.

Пусть P - 3-я вершина данного сече-

ия. Пусть $CP = x$.

$AP = \sqrt{4+x^2-2\cdot 2\cdot x\cdot \cos\angle ACT}$

$\cos\angle ACT = \frac{1}{1,5}$ (из прямоугольного $\triangle TH_1C$)

Тогда $AP = \sqrt{4+x^2-4x\cdot\frac{1}{1,5}} = \sqrt{4+x^2-\frac{8}{3}x}$

$BP = \sqrt{x^2+1-2x\cdot\cos\angle BCP}$

$\cos\angle BCP = \frac{0,5}{1,5} = \frac{1}{3}$ (из прямоугольного $\triangle TH_2C$).

$BP = \sqrt{x^2+1-\frac{2x}{3}}$

При этом x изменяется от 0 до 1,5.

Тогда косинус угла между AP и BP: (пусть он равен α)

$$AB^2 = AP^2 + BP^2 - 2\,AP\cdot BP\cos\alpha$$

$$5 = 4+x^2-\frac{8}{3}x+x^2+1-\frac{2x}{3}-2\sqrt{4+x^2-\frac{8}{3}x}\cdot\sqrt{x^2+1-\frac{2x}{3}}\cdot\cos\alpha$$

$$\frac{2x^2-\frac{10x}{3}}{2\sqrt{4+x^2-\frac{8}{3}x}\cdot\sqrt{x^2+1-\frac{2x}{3}}} = \cos\alpha$$

Тогда $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$$S_\triangle = \frac{1}{2}\cdot AP\cdot BP\cdot\sin\alpha$$

$$S_\triangle = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{4+x^2-\frac{8x}{3}}\cdot\sqrt{x^2+1-\frac{2x}{3}}\cdot\sqrt{1-\frac{\left(2x^2-\frac{10x}{3}\right)^2}{4\left(4+x^2-\frac{8x}{3}\right)\left(x^2+1-\frac{2x}{3}\right)}}$$

– произведение возрастающих и убывающей функции)

Выражение $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4+x^2-\frac{8x}{3}}\cdot\sqrt{x^2+1-\frac{2x}{3}}$ – (при $x\in[0;\frac{1}{3};1,5]$) возрастающая функция, => минимумы достигает при $x=0$ ($D_1<0$, $D_2<0$ у подкоренных выражений функции всегда больше 0, т.к. $a>0$.), => $x_{01}=\frac{8}{6}$; $x_{02}=\frac{2}{6}$

Рассмотрим функцию

$$\sqrt{1-\frac{\left(2x^2-\frac{10x}{3}\right)^2}{4\left(4+x^2-\frac{8x}{3}\right)\left(x^2+1-\frac{2x}{3}\right)}}$$

Она минимальна, когда минимально подкоренное выражение.

Можно заметить, что синус α изменяется в пределах от 1 ($\triangle ABC$) до:

$2,25+2,25-2\cdot 2,25\cdot\cos\alpha = 5$ (в $\triangle ATB$)

$\cos\alpha = \frac{-0,5}{2\cdot 2,25}$

$\cos\alpha = -\frac{1\cdot 2}{2\cdot 11} = -\frac{1}{11}$, => $\sin\alpha = \sqrt{\frac{121-1}{121}} = \sqrt{\frac{120}{121}}$

Т.е. $\sin\alpha$ изменяется от 1 до $\sqrt{\frac{120}{121}}$,
в то время как длины сторон изменяются от 2 до 1,5 и от 1 до 1,5.
И разница их произведений в крайних случаях существенно больше разницы синусов.
(Значение синуса уменьшается при переходе точки P из C в T), а значение произведения сторон увеличивается:

$2{,}25 - 2 = 0{,}25$.

(~~Она~~ Оно увеличивается, т.к. $a^2 > (a-0{,}5)(a+0{,}5)$
$(a^2 > a^2 - 0{,}25)$.

Поэтому площадь сечения минимальна при расположении P в точке C, и равна $\frac{1}{4}$. * (см. продолжение)

~~Ответ: 1~~.

№3.

Пусть m деталей было в одном ящике, тогда m ящиков понадобилось и m дней работал всего.
Тогда всего деталей m^2, $\Rightarrow$ в день изготавливается $3m^2$ деталей.

Пусть t заказчиков было всего.
Тогда $t^3 = \frac{3m^2 \cdot m}{2 \cdot t}$

$2t^{3\frac{1}{4}} = 3m^3$

Надо Найти минимальное t m, при том, что $t \in N$.

$m^3 = \frac{2 \cdot t^4}{3}$

t^4 должно содержать 3 в $\frac{4}{4}$ степени, чтобы m было натуральным, и 2 в степени $3\ell - 1$, где $\ell \in Z$, при этому степень двойки кратна 4, чтобы $t \in N$. Тогда t содержит 2 в 8 степени.

$m^3 = \frac{2 \cdot 2^8 \cdot 3^4}{3}$

$m^3 = 2^9 \cdot 3^3, \Rightarrow m = 2^3 \cdot 3 = 24$.

Меньшего m быть не может, т.к. иначе $m \notin N$ или $t \notin N$.

Ответ: 24.

№2.

$P(x) = x^2 + 2$; $Q(x) = x + 1$

Многочлен $P(x)=x^3+2$ не может появиться на доске.

Запишем произведение уже имеющихся многочленов:

$(x^2+2)(x+1)=x^3+x^2+2x+2$

Тогда нам нужно получить многочлен x^2+2x, чтобы записать $P(x)$.

Так как понижать степень многочлена (делить многочлен) до по условию задачи нельзя, то x^2+2x надо составить из суммы или разности x^2+2 и $x+1$.

Их сумма равна x^2+x+3, разность: x^2-x+1. ~~Разность~~ Теперь мы можем только складывать или вычитать имеющиеся многочлены. Но мы не можем получить многочлен x^2+2x, т.к. сколько бы ни прибавляли бы 1) в квадратному трехчлену ему, свободный член будет больше 0, а если будем отнимать, то коэффициент 2 перед x не будет достигнут.

Также многочлен x^3+2 раскладывается в виде многочленов 1 и 2 степени на ~~два~~ множителя единственным способом:

$x^3+2=(x+\sqrt[3]{2})(x^2-\sqrt[3]{2}\cdot x+2^{\frac{2}{3}})$. Но иррациональные коэффициенты $\sqrt[3]{2}$ и $2^{\frac{2}{3}}$ нельзя получить, складывая и вычитая многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами, а получить x^3+2 можно ~~иначе~~ умножением многочлена второй степени на многочлен первой степени, но не их сложением и вычитанием.

Получается, что надо $x+1$ привести к виду $(x+\sqrt[3]{2})$, а x^2+2 – к виду $(x^2-\sqrt[3]{2}x+2^{\frac{2}{3}})$, что нельзя сделать из-за рациональности коэффициентов $P(x)$ и $Q(x)$. Ведь, как известно, сумма или разность рациональных чисел есть число рациональное.

№1.

2. $\arcsin 2x=3\cdot\arccos x$

Из уравнения делаем вывод, что, т.к. $\sin\alpha\in[-1;1]$, => ~~sin~~ $2x\in[-1;1]$, =>

~~sin x ∈ cos x ∈~~ $\arcsin 2x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $\Rightarrow x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$

$\arccos x \in [\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}]$.

~~Функция $f(x) = \arccos x$ убывает при на промежутке от $[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}]$.~~

~~Функция $f(x) = \arcsin 2x$ возрастает на промежутке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $\Rightarrow$~~

Функция $f(x) = 3\arccos x$ убывает при $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$

Функция $f(x) = 2\arcsin 2x$ возрастает при $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$, $\Rightarrow$ у данных в функций есть не более одной общей точки пересечения.

Найдём области значения функций

$E(\arcsin 2x) = [-\pi; \pi]$

$E(3\arccos x) = [\pi; 2\pi]$, $\Rightarrow$ единственное общее значение равно π.

Тогда $2\arcsin 2x = \pi$

$\arcsin 2x = \frac{\pi}{2}$

$2x = 1$, $x = \frac{1}{2}$.

Проверка: $2 \cdot \arcsin 1 = 3 \cdot \arccos \frac{1}{2}$

$\frac{2 \cdot \pi}{2} = \frac{3 \cdot \pi}{3}$

$\pi = \pi$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

№ 4 (продолжение).

В $\triangle ATC$ значение отрезка AP минимально в случае, если AP высота.

$\cos \angle ACT = \frac{1}{1,5}$, $\Rightarrow AH_2 = AC \cdot \sin \angle ACT =$

$= AC \cdot \sqrt{\frac{1,5^2 - 1}{1,5^2}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1,25}{2,25}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{1,5 \cdot 2} = \frac{\sqrt{5}}{1,5}$.

Построим BP.

$PC = 2 \cdot \frac{1}{1,5} = \frac{2}{1,5} = \frac{4}{3}$

Тогда $BP = \sin \angle BCP \cdot 1 = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3}$.

Площадь треугольника в этом случае:

$S = \frac{1}{2} \cdot BP \cdot AP \cdot \sin \alpha$

$\cos \angle APB = \frac{\frac{8}{3} + \frac{5}{2,25} - 5}{2 \cdot \frac{\sqrt{8}}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{1,5}} = \frac{\left(\frac{8}{9} + \frac{20}{9}\right) 4,5 - 5}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{10}} =$

$= \frac{4\pi \cdot 4,5}{9 \cdot 4 \cdot \sqrt{10}} = \frac{\pi}{2\sqrt{10}}$.

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{49}{4 \cdot 10}}$

Ответ:

$S_{авр} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{1,5} \cdot \frac{\sqrt{8}}{3} \cdot \sin\alpha = \frac{\sqrt{40}}{9} \cdot \sin\alpha =$

$= \frac{\sqrt{40}}{9} \sqrt{1 - \left(\frac{\frac{8}{9} \cdot \frac{5}{3,25} - \frac{2045}{9}}{4\sqrt{10}} \cdot 4,5\right)^2} =$

$= \frac{\sqrt{40}}{9} \cdot \sqrt{1 - ?}$

3