ШИФР 11.6

Дата 28.11.2020

Олимпиадная работа по математике

Ученика (цы) 11 класса школы (гимназии, лицея, интерната) № 3

Аудитория № 9

ФИО Баззаева Андрея Григорьевича

Дата рождения 02.05.2003

Учитель Бутнашева Т.Н.

1

№1	№2	№3	№4	№5	Σ
2	3	4	3	6	18

ШИФР 11.6

Задание 1.

Пусть длина прямоугольника a, ширина b, тогда изначально периметр равен $(a+b)\cdot 2$, а новый равен: $(1-0{,}12)\cdot 2\cdot(a+b) = ((a\cdot(1-0{,}1)+b(1-0{,}2))\cdot 2$

$$0{,}88a+0{,}88b = 0{,}9a+0{,}8b$$

$$0{,}08b = 0{,}02a$$

$$4b=a$$

Тогда при вторых изменениях периметр будет равен $(a\cdot(1-0{,}2)+b(1-0{,}1))\cdot 2 \Rightarrow$ периметр изменится на

$$\frac{((a+b)\cdot 2-(a\cdot(1-0{,}2)+b(1-0{,}1))\cdot 2)\cdot 100}{(a+b)\cdot 2} = \frac{(5b-0{,}8\cdot 4b-0{,}9b)\cdot 100}{5b} =$$

$$= \frac{(5-3{,}2-0{,}9)\cdot b\cdot 20}{b} = 20\cdot 0{,}9 \overset{\text{на}}{=} 18\%$$

Ответ: на 18%

Задание 2

$$\begin{cases} x^3+xy+y^2=-1 \\ y^3+2y+x^2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(x^2+y)+y^2=-1 \\ y^3+y+x^2+y=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} & x^2+y=\frac{-1-y^2}{x} \\ & y^3+y+\frac{-1-y^2}{x}=0 \end{aligned}$$

$x\neq 0$, т.к. иначе $y^2=-1$; $y^2\geq 0 \Rightarrow$ неверно, значит можно делить на x

$$\frac{xy(y^2+1)-(y^2+1)}{x}=0$$

$$\frac{(xy-1)(y^2+1)}{x}=0$$

$$(xy-1)(y^2+1)=0$$

(1) $xy-1=0$ ~~или~~ (2) $y^2+1=0$

$xy=1$

$y^2\geq 0 \Rightarrow y^2+1\geq 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow y^2+1\neq 0 \Rightarrow$ только первый случай $\Rightarrow$

$\Rightarrow xy=1$ – ч.т.д.

2

ШИФР 11.6

Задание 3.

Всего положительных ответов: $65+45+30=140$

Если девушка игривая, то на 2 из 3 вопросов она даст положительный ответ, если же она серьезная, то на 1 из 3. (игривая ответит „да" на вопросы не про её цвет волос и „нет" на вопрос про свой, а серьезная наоборот)

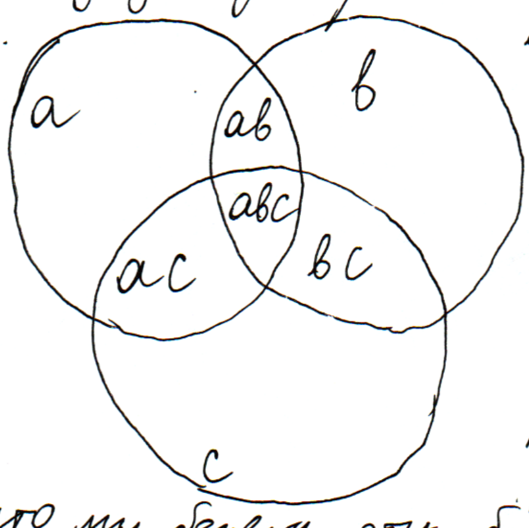
Пусть x - кол-во серьезных, тогда игривых $100-x$, значит всего серьезные дали x положительных ответов, а ~~иг~~ игривые $(100-x)\cdot 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x+(100-x)\cdot 2=140$$
$$x+200-2x=140$$
$$x=60.$$

Ответ: 60

Задание 4.

• Представим задачу в форме диаграммы Эйлера-Венна.



• Введем обозначения
a - вероятность 1
b - вероятность 2
c - вероятность 3, тогда
ab - пересечение a, b
ac - перес. a, c
bc - перес. b, c
abc - ~~их~~ общее пересечение.

• Далее введем условное обозначение
1" - только (1a - прим.), что значит, что мы берем эту область без её пересечений с другими (прим. ab → (ab) ; 1ab → ◊)

3

ШИФР 11.6

• Шанс, что хоть что-то произойдет равен 1 ⇒ если мы возьмем всю зону диаграммы, то она будет равна 1 ⇒ $1a + 1b + 1c + 1ab + 1bc + 1ac + abc = 1$

А вне?

$(1a + 1ab + 1ac + abc) = a$

$a + 1b + 1c + 1bc = 1$

$1bc = bc - abc$

$1b = b - ab - 1bc = b - ab - bc + abc$

$1c = c - ac - 1bc = c - ac - bc + abc$

$a + b + c - ab - bc + abc - ac - bc + abc + bc - abc = 1$

$a + b + c - ab - bc - ac + abc = 1$

$a = b = c = \frac{1}{2} \Rightarrow a + b + c = 1{,}5$

$1{,}5 - ab - bc - ac + abc = 1$

$abc + 0{,}5 = ab + bc + ac$

$ac = 1ac + abc$

$abc + 0{,}5 = ab + bc + 1ac + abc$

$1ac + ab + bc = \frac{1}{2}$

• Пусть: $ab < \frac{1}{6}$; $bc < \frac{1}{6}$; $ac < \frac{1}{6}$, тогда т.к. $ac = 1ac + abc$

$1ac \le ac \Rightarrow$

$\Rightarrow 1ac < \frac{1}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow ab + bc + 1ac < \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \Rightarrow ab + bc + 1ac < \frac{1}{2}$, но $ab + bc + 1ac = \frac{1}{2} \Rightarrow$ предположение не верно ⇒

$\Rightarrow ab \geq \frac{1}{6}$ или $bc \geq \frac{1}{6}$ или $ac \geq \frac{1}{6}$ – ч.т.д.

ШИФР 11.6

Задание 5.

$20x+19y=2021$

$x=\frac{2021-19y}{20}$, причем x - целое $\Rightarrow (2021-19y) \vdots 20$

~~2021~~ $\frac{2021}{20}=101$ ост. 1 $\Rightarrow$ ост. от деления $19y$ на 20 также должен быть равен 1.

ост. $\frac{19\cdot y}{20}$ = ост. от $\frac{\left(\text{ост.}\frac{19}{20}\cdot\text{ост.}\frac{y}{20}\right)}{20}$ = ост. от $\frac{\left(19\cdot\text{ост.}\frac{y}{20}\right)}{20}$

Пусть: $y=20n+k$, где k - остаток. $\Rightarrow k<20$, n - целое

ост $\frac{k\cdot 19}{20}=1$ $\Rightarrow$ последняя цифра произведения k и 19 равна 1, а предпоследняя - четная. Чтобы $k\cdot 19$ заканчивалось на 1, k должен заканчиваться на 9 $\Rightarrow k=9$ или $k=19$; при $k=9$, $k\cdot 19=171$, $\frac{k\cdot 19}{20}=8$ ост. 11 - не подх.

при $k=19$, $k\cdot 19=361$, $\frac{k\cdot 19}{20}=18$ ост. 1 - подх $\Rightarrow k=19$,

$y=20n+19$, тогда $x=\frac{2021-19(20n+19)}{20}=\frac{2021-380n-361}{20}=$

$=\frac{1660-380n}{20}=83-19n$

~~Ответ: x=83-19k, y=20k~~

Ответ: $x=83-19n$; $y=20n+19$

5