ШИФР 11.21

Дата 28.11.2020.

Олимпиадная работа по математике

Ученика (цы) 11 Б класса школы (гимназии, лицея, интерната) № 4

Аудитория № 16

ФИО Авершиев Александр Максимович

Дата рождения 08.07.2003.

Учитель Терпугова Ирина Александровна

3 листа

1	2	3	4	5	Итог
2	3	4	4	6	19

ШИФР 11.21

Задание 1.

Пусть длина прямоугольника a, ширина b.

Тогда изнач. периметр $P=2(a+b)$.

После уменьшения длины на 10% и ширины на 20%

$P_1 = 2(0{,}9a + 0{,}8b) = 0{,}88P$

После уменьшения длины на 20% и ширины на 10%

$P_2 = 2(0{,}8a + 0{,}9b)$

1) $2(0{,}9a + 0{,}8b) = 0{,}88 \cdot 2(a+b)$

$0{,}9a + 0{,}8b = 0{,}88a + 0{,}88b$

$0{,}02a = 0{,}08b$

$a = 4b$

2) $P = 2(a+b) = 2(4b+b) = 10b$

$P_2 = 2(0{,}8 \cdot 4b + 0{,}9b) = 8{,}2b$

3) $1 - \frac{P_2}{P} = 1 - \frac{8{,}2b}{10b} = 0{,}18$.

Ответ: периметр уменьшится на 18%.

Задание 2.

Дано: $x^3 + xy + y^2 = -1$; $y^3 + 2y + x^2 = 0$. Доказать: $xy = 1$.

Док-во:

1) $y^3 + 2y + x^2 = 0$

$y(y^2+1) + (x^2+y) = 0$

$x^2 + y = -y(y^2+1)$

2) Подставим в другое выражение:

$x^3 + xy + y^2 = -1$.

$x(x^2+y) + y^2 + 1 = 0$

$-xy(y^2+1) + (y^2+1) = 0$

$(y^2+1)(1-xy) = 0$

Т.к. $y^2+1 \geq 1$, то $1 - xy = 0 \Rightarrow xy = 1$.

Доказано.

Задание 3.

Пусть кол-во серьезных девушек равно a; кол-во игривых равно b.

ШИФР ____________

Тогда каждая серьезная девушка ответила утвердительно 1 раз, а каждая игривая 2 раза. Тогда:

$$\begin{cases} a+b=100 \\ a+2b=65+45+30 \end{cases}$$

4б

$$\begin{cases} a+b=100 \\ a+2b=140 \end{cases}$$

$$b=40 \Rightarrow a=60.$$

Ответ: 60 девушек.

Задание 4.

Пусть $P(1)$; $P(2)$; $P(3)$ – вероятности 1-го, 2-го и 3-го соответств. только?

$P(1,2)$; $P(2,3)$; $P(1,3)$ – вероятности пересеч. только 2-ух событий

$P(1,2,3)$ – вероятность пересечения всех 3-х событий.

Тогда: $P(1)+P(2)+P(3)+P(1,2)+P(2,3)+P(1,3)+P(1,2,3) \leq 1$.

$$\begin{cases} P(1)+P(1,2)+P(1,3)+P(1,2,3)=\frac{1}{2} \\ P(2)+P(1,2)+P(2,3)+P(1,2,3)=\frac{1}{2} \\ P(3)+P(1,3)+P(2,3)+P(1,2,3)=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} P(1)+P(2)+P(3)+2(P(1,3)+P(2,3)+P(1,2))+3P(1,2,3)=\frac{3}{2} \\ P(1)+P(2)+P(3)+P(1,3)+P(2,3)+P(1,2)+P(1,2,3)\leq 1. \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$P(1,2)+P(1,3)+P(2,3)+2P(1,2,3)\geq\frac{1}{2} \quad (1)$$

~~Допустим~~ найдутся 2 события, вероятность пересеч. которых ~~больше~~ не меньше $\frac{1}{6}$. Тогда:

$$\begin{cases} P(1,2)+P(1,2,3)<\frac{1}{6} \\ P(1,3)+P(1,2,3)<\frac{1}{6} \\ P(2,3)+P(1,2,3)<\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$P(1,2)+P(1,3)+P(2,3)+3P(1,2,3)<\frac{1}{2}.$$

Это противоречит условию (1), т.к.
$P(1,2,3) \geq 0$ по определению. Противоречие. **ШИФР** 11.21

Значит найдутся 2 события, вероятность пересеч. которых не меньше $\frac{1}{6}$.

Доказано.

Задание 5.

Решить $20x+19y=2021$ в целых числах.

Т.к. $2021 \equiv 1 \pmod{20}$ и $20x \equiv 0 \pmod{20}$, то

$19y \equiv 1 \pmod{20}$

$(20-1)y \equiv 1 \pmod{20}$

$y \equiv 19 \pmod{20}$

Т.е. $y = 20k-1$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Тогда $20x+19(20k-1)=2021$

$20x+380k=2040$

$x+19k=102$

$x=102-19k$

Т.е. решений ур-ия бесконечно много. Они имеют вид: $(102-19k; 20k-1)$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Проверка: $20(102-19k)+19(20k-1)=$
$=20\cdot 102-20\cdot 19k+19\cdot 20k-19=2021$

Ответ: $(102-19k; 20k-1)$, где $k \in \mathbb{Z}$. 6