ШИФР 11.86

Дата 28.11.20 г.

Олимпиадная работа по математике

Ученика (цы) 11 класса школы (гимназии, лицея, интерната) № 57

Аудитория № 25

ФИО Зенков Евгений Владимирович

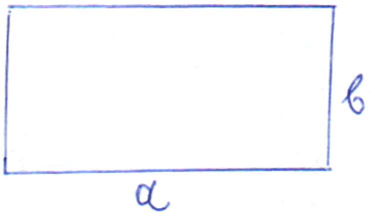
Дата рождения 12.03.2004 г.

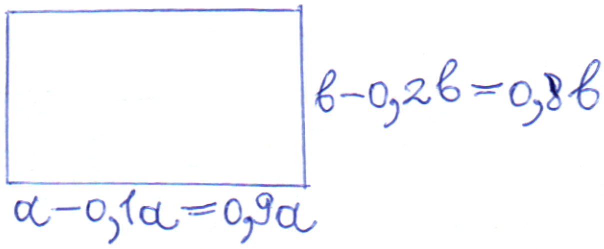
Учитель Карасёва Елена Ивановна

№1	№2	№3	№4	№5	Σ
2	3	4	5	6	20.

ШИФР 11.86

№1.





Пусть $а$ — начальная длина

$в$ — начальная ширина

$Р$ — начальный периметр

$Р = 2а + 2в$

$Р - 0{,}12Р = 0{,}88Р = 2(0{,}9а + 0{,}8в) = 1{,}8а + 1{,}6в$

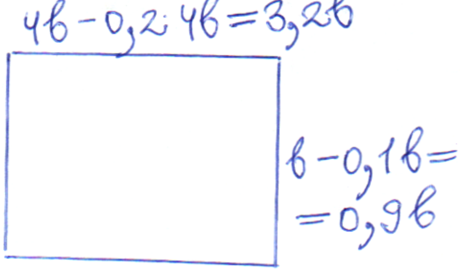
$0{,}88 \cdot 2а + 0{,}88 \cdot 2в = 1{,}8а + 1{,}6в \quad |:2$

$0{,}88а + 0{,}88в = 0{,}9а + 0{,}8в$

$0{,}08в = 0{,}02а \quad | \cdot 100$

$8в = 2а$

$а = 4в$



$Р = 2а + 2в = 8в + 2в = 10в$

$Р_н$ — новый периметр

$Р_н = 2 \cdot 3{,}2в + 2 \cdot 0{,}9в = 6{,}4в + 1{,}8в = 8{,}2в$

ШИФР 11.86

$$\frac{P-P_n}{P}=\frac{10b-8{,}2b}{10b}=\frac{1{,}8b}{10b}=\frac{1{,}8}{10}=\frac{18}{100}$$

$$\frac{18}{100}\cdot 100\% = 18\%$$

Ответ: Уменьшится на 18%.

№3.

Пусть k — кол-во серьёзных девушек;
Тогда $(100-k)$ — кол-во игривых;
При этом у каждой девушки волосы ровно одного цвета;
Поэтому серьёзная ответит утвердительно ровно один раз, игривая ровно один раз ответит неутвердительно $\Rightarrow$ два раза ответит утвердительно.

4б

Всего утвердительных ответов:

$$k+(100-k)\cdot 2 = k+200-2k = 200-k$$

По условию всего утвердительных ответов:

$$65+45+30=140$$

Тогда: $200-k=140 \Rightarrow k=60$

Ответ: 60 серьёзных девушек в группе.

№5.

ШИФР 11.86

$20x+19y=2021,\ x,y\in\mathbb{Z}$

Для начала заметим, что:

$20\cdot(1)+19(-1)=1 \quad |\cdot 2021$

$20\cdot(2021)+19(-2021)=2021$ – одно из решений

Пусть k, l – другое решение, то есть:
(или то же самое)

$20k+19l=2021$

Тогда:

$20k+19l=2021$

$20\cdot 2021+19(-2021)=2021$

$\Downarrow$

$20(k-2021)+19(l+2021)=0$

$20(2021-k)=19(l+2021)$

$20 \not\vdots\ 19 \Rightarrow (2021-k)\vdots 19 \Rightarrow (2021-k) \overset{\text{присвоим}}{:=} 19m,$
$m\in\mathbb{Z}$

$19 \not\vdots\ 20$ (и не имеет общих делителей) $\Rightarrow$
$\Rightarrow (l+2021)\vdots 20 \Rightarrow (l+2021):=20n,\ n\in\mathbb{Z}$

$\cancel{20}\cdot\cancel{19}m=\cancel{19}\cdot\cancel{20}n \Rightarrow m=n$

$\Downarrow$

$2021-k=19m \Rightarrow k=2021-19m$

$l+2021=20m \Rightarrow l=20m-2021$

Мы доказали, что других решений быть не может.
Проверим данное решение.

$20(2021-19m)+19(20m-2021)=2021$ ШИФР 11.86

$20\cdot 2021-\cancel{19\cdot 20m}+\cancel{19\cdot 20m}-19\cdot 2021=2021$

$(20-19)\cdot 2021=2021$

$2021=2021$ — верно $\forall m$

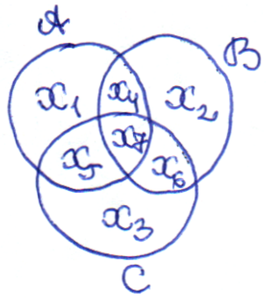
Тогда:

$20x+19y=2021$, $x,y\in\mathbb{Z}$

$\begin{cases} x=2021-19m, & m\in\mathbb{Z},\\ y=20m-2021, & m\in\mathbb{Z}\end{cases}$ — полная группа решений

Ответ: $(2021-19m;\ 20m-2021)$, $m\in\mathbb{Z}$.

и 4.



Рассм. вероятность события $P(A\cup B\cup C)$*.

$P(A\cup B\cup C)\leq 1$ (просто по определению вероятности).

Но $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-$
$-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$.

(Следует из классического определение вероятности: Пусть кол-во благоприятных исходов указано на рисунке: Тогда:

---

* Забыли сказать, что и обозначили: A — 1-е событие; B — 2-е; C — 3-е.

ШИФР 11.86

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) -$
$- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$x := x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$

$y :=$ Полная группа событий

$$\frac{x}{y} = \frac{x_1 \cancel{+ x_4} + x_5 \cancel{+ x_7}}{y} + \frac{x_2 + x_4 \cancel{+ x_6} \cancel{+ x_7}}{y} +$$
$$+ \frac{x_3 \cancel{+ x_5} + x_6 \cancel{+ x_7}}{y} - \frac{\cancel{x_4} \cancel{+ x_7}}{y} - \frac{\cancel{x_5} \cancel{+ x_7}}{y} -$$
$$- \frac{\cancel{x_6} \cancel{+ x_7}}{y} + \frac{\cancel{x_7}}{y} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7}{y} -$$

верно

ч. т. д.)

Примечание: В док-ве вспомогательного факта использовались элементарные исходы.

$1 \geq P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) \geq \cancel{-1} + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} + P(A \cap B \cap C)$

$P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) \geq \frac{1}{2} + P(A \cap B \cap C)$

Предположим, что нет двух событий, вероятность пересечения кот. не меньше, чем $\frac{1}{6}$, то есть

$P(A \cap B) < \frac{1}{6}$; $P(A \cap C) < \frac{1}{6}$; $P(B \cap C) < \frac{1}{6}$.

Тогда:

ШИФР 11.86

$P(A\cap B\cap C)+\frac{1}{2}\leq P(A\cap B)+P(A\cap C)+P(B\cap C)<$

$<\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

$P(A\cap B\cap C)+\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$

$P(A\cap B\cap C)<0$ — противоречит определению вероятности

Тогда наше предположение неверно, и найдутся два события, вероятность пересечения которых не меньше $1/6$.

ч. т. д.

№ 2.

$$\begin{cases} x^3+xy+y^2=-1, \\ y^3+2y+x^2=0 \quad | \cdot x\neq 0 \end{cases} \quad x,y\in\mathbb{R}$$

Если $x=0$, то $0+0+y^2=-1$ — невозможно в $\mathbb{R}\Rightarrow$

$\Rightarrow x\neq 0$.

$$\begin{cases} x^3+xy+y^2=-1, \\ xy^3+2xy+x^3=0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$\cancel{x^3}+xy+y^2-xy^3-2xy-\cancel{x^3}=-1$

$y^2-xy^3-xy=-1$

$y^2+1=xy^3+xy$

$y^2+1 = xy^3+xy$

ШИФР 11.86

$(y^2+1) = xy(y^2+1) \quad | : (y^2+1) \neq 0$

$xy=1$ — верно для всех решений

В условии сказано, что $x, y \in \mathbb{R}$ и

$$\begin{cases} x^3+xy+y^2=-1, \\ y^3+2y+x^2=0 \end{cases},$$

то есть подразумевается, что решения существуют.

Впрочем, если решений нет и условие ложно, то из ложного условия следует всё, что угодно, в том числе и $xy=1$.

3б

ч.т.д.