ШИФР 10.68

Дата 28.11.2020

Олимпиадная работа по математике

Ученика (цы) 10 класса школы (гимназии, лицея, интерната) №72

Аудитория № 1

ФИО Чолебаева Михаила Владимировича

Дата рождения 01.06.2004

Учитель Терентьева А. А.

1 из 3

№1 2 Ср
№2 3,5 ...
№3 0б А.
№4 5б М.
№5 6 Гор
Итог 16

ШИФР 10.68

Задание 1. 2

Дано: прямые $y=ax+b$, $y=bx+c$, $cx+a$ проходят через точку $(1;1)$

Найти: a, b, c

Решение: Так как эти 3 прямые проходят через точку $(1;1)$, то значения функций в точке $x=1$ у прямых равно 1. Получаем систему из 3 уравнений:

$$\begin{cases} 1=a+b \\ 1=b+c \\ 1=c+a \end{cases} \qquad \begin{cases} a-c=0 \\ 1=b+c \\ c=1-a \end{cases}$$

Подставим c из 3 уравнения в 1.

$$\begin{cases} 2a=1 \\ b+c=1 \\ c=1-a \end{cases} \qquad \begin{cases} a=0,5 \\ b+c=1 \\ c=0,5 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=0,5 \\ b=0,5 \\ c=0,5 \end{cases}$$

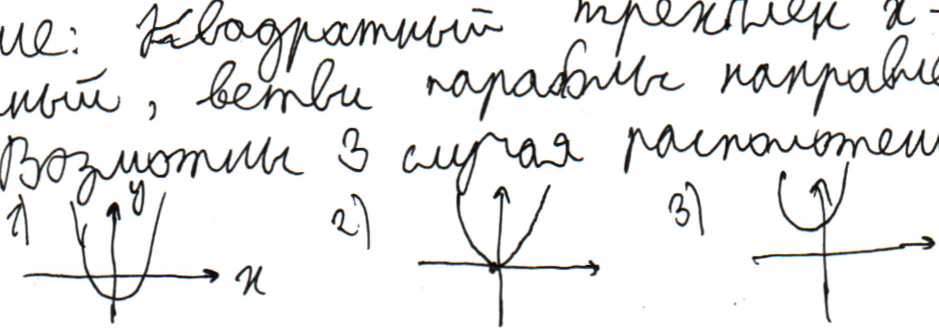
Ответ: при $a=0,5$; $b=0,5$; $c=0,5$

Задание 2.

Дан квадратный трёхчлен x^2+px+q

Найти: q, при которых есть p, такие, что для любого x, $x^2+px+q>0$

Решение: Квадратный трёхчлен x^2+px+q приведённый, ветви параболы направлены вверх. Возможны 3 случая расположения параболы:



ШИФР ____________

Нам подходит 3 случай, парабола парит над осью Ox, $x^2+px+q>0$ для любого x. Тогда дискриминант должен быть отрицателен

$D = p^2-4q$, $D<0$

$p^2-4q<0 \Leftrightarrow p^2<4q$ Нам необходимо

3б найти такие q, чтобы были p - решения этого неравенства. $p^2 \geq 0$, значит $4q$ должно быть больше 0.

$4q>0$

$q>0$

Ответ: при $q \in (0;+\infty)$.

Задание 3.

Дано: $p_1=p_2=p_3=\frac{4}{5}$.

Доказать: $p_0 = p_1 \cap p_2 \cap p_3 \cap \geq \frac{2}{5}$ какие?

Решение: Когда мы пересекаем события, мы должны их перемножить, так как должны выполняться каждое одновременно.

Тогда $p_0=p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = p_1^3$, $p_0 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}$ 0б

Теперь сравним $\frac{64}{125}$ и $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{5}=\frac{50}{125}$

$\frac{64}{125} > \frac{50}{125}$, т.к. знаменатели равны, а числитель 1 дроби больше, т.е. $\frac{64}{125}>\frac{2}{5} \Rightarrow p_0>\frac{2}{5}$, что требовалось доказать.

Задание 5.

ШИФР 10.68

$20x+19y=2020$

Выразим x: $x=\frac{2020-19y}{20}=101-\frac{19y}{20}$ 6б

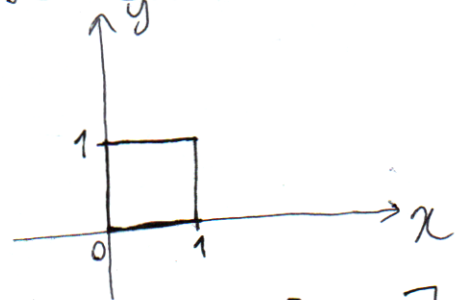
x и 101 - целые, значит $\frac{19y}{20}$ - целое, т.е. $19y \vdots 20$, однако $19 \not\vdots\, 20 \Rightarrow y \vdots 20$, т.е. $y=20n$, $n\in Z$, тогда $x=101-\frac{19\cdot 20n}{20}=$
$=101-19n$, $n\in Z$

Ответ: $(101-19n; 20n)$ $n\in Z$.

~~Задача 4.~~

Задание 5. 4.

Построим единичный квадрат на координатной плоскости:



Заметим, что $D(y)$: $x\in[0;1]$, $E(y)$: $y\in[0;1]$
При $x=0;1$ $y\in[0;1]$, при $y=0;1$ $x\in[0;1]$
Заметим, что выполняется симметрия относительно точки $(0,5; 0,5)$, через которую проходят две прямые, явл. диагоналями квадрата $y=x$ и $y=1-x$, чтобы выполнить симметрию, воспользуемся модулями. Получим:
$|y|+|1-y|=|x|+|1-x|$. ~~Здесь выполняются условия, что при $x=0;1$ $y\in[0;1]$ и при~~ Также добавим $D(y)$ и $E(y)$ с помощью корней и возведения в квадрат:

ШИФР ______________

$|\sqrt{y}|^2 + |\sqrt{1-y}|^2 = |\sqrt{x}|^2 + |\sqrt{1-x}|^2$

$D(y)$: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$ $x \in [0;1]$ $E(y)$: $\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 1 \end{cases}$ $y \in [0;1]$

$D(y)$ и $E(y)$ совпадают, теперь проверим значения:

При $x = 0; 1$ будет уравнение

$|\sqrt{y}|^2 + |\sqrt{1-y}|^2 = 1$, решением которого будет явл. $y \in [0;1]$

При $y = 0;1$ получаем $|\sqrt{x}|^2 + |\sqrt{1-x}|^2 = 1$, $x \in [0;1]$, мы всё проверили и убедились, что ~~не~~ единичный квадрат будет задаваться уравнением $|\sqrt{y}|^2 + |\sqrt{1-y}|^2 = |\sqrt{x}|^2 + |\sqrt{1-x}|^2$

Ответ: $|\sqrt{y}|^2 + |\sqrt{1-y}|^2 = |\sqrt{x}|^2 + |\sqrt{1-x}|^2$