ШИФР 11.33

стр. 1 из 13

Дата 28.11.2020

Олимпиадная работа по математике

Ученика (цы) 11А класса школы (гимназии, лицея, интерната) № 73

Аудитория № 214

ФИО Трошлякова Олега Сергеевича

Дата рождения 28.06.2003

Учитель Пьенькина Елена Анатольевна

№1	№2	№3	№4	№5	итог
2	3	4	3	6	18

① Пусть a, b – начальные длина и ширина прямоугольника, а p – начальный периметр.

Пусть a_1, b_1 – длина и ширина прямоуг. в случае уменьшения a на 10%, b на 20%. А p_1 – ~~перим~~ периметр при таком уменьшении.

Аналогично, пусть a_2, b_2 – длина и ширина прямоуг. в случае уменьшения длины на 20%, а ширины на 10%, а p_2 – периметр при таком уменьшении.

Тогда.

$a_1 = 0,9a$

$b_1 = 0,8b.$

$a_2 = 0,8a$

$b_2 = 0,9b$

По условию.

$$\frac{p - p_1}{p} = 0,12.$$

$$1 - \frac{p_1}{p} = 0,12.$$

$$\frac{p_1}{p} = 0,88.$$

Тогда найдём:

$$\frac{p - p_2}{p} - ?$$

$p_1 = 0{,}88\,p.$ $\quad p = 2(a+b)$, тогда...

$$2(0{,}9a + 0{,}8b) = 0{,}88 \cdot 2(a+b).$$

$$0{,}9a + 0{,}8b = 0{,}88a + 0{,}88b.$$

$$0{,}9a - 0{,}88a = 0{,}88b - 0{,}8b.$$

$$0{,}02a = 0{,}08b.$$

$$2a = 8b.$$

$$\boxed{a = 4b} \ *$$

$$\frac{p - p_2}{p} = 1 - \frac{p_2}{p} = 1 - \frac{2(a_2 + b_2)}{2(a+b)} =$$

$$1 - \frac{0{,}8a + 0{,}9b}{a+b}$$

Применим $*$, тогда:

$$1 - \frac{0{,}8 \cdot 4 \cdot b + 0{,}9b}{4b + b} = 1 - \frac{b(3{,}2 + 0{,}9)}{b(4+1)} =$$

$$1 - \frac{(3{,}2 + 0{,}9)}{(4+1)} = 1 - \frac{4{,}1}{5} = 1 - \frac{8{,}2}{10}$$

$$1 - \frac{82}{100} = \frac{18}{100} \text{ или } 18\%$$

Ответ: 18%

② $\begin{cases} x^3 + xy + y^2 = -1. & ① \\ y^3 + 2y + x^2 = 0. & ② \end{cases}$ x, y - действ. числа.

① ~~может~~ можем домножить на y, т.к ~~y не~~ y = 0 ~~не будет корнем~~ не является корнем.

если y = 0, то.

$\begin{cases} x^3 + 0y + 0^2 = -1. \\ 0^3 + 2\cdot 0 + x^2 = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x^3 = -1. \\ x^2 = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$ | нет решений

$\Downarrow$

(y = 0) - не корень

$\begin{cases} x^3y + xy^2 + y^3 = -y \\ y^3 + 2y + x^2 = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x^3y + xy^2 + y^3 + y = 0. & ① \\ y^3 + 2y + x^2 = 0. & ② \end{cases}$

① - ② $\Rightarrow$ $x^3y + xy^2 + y^3 + y - y^3 - 2y - x^2 = 0.$

$x^3y + xy^2 - x^2 - y = 0.$

$xy(x^2 + y) - (x^2 + y) = 0.$

$(xy - 1)(x^2 + y) = 0.$

Тогда

$xy = 1$ или. $x^2 + y = 0$.

$x^2 = -y$.

но тогда по ②

$(y^3 + 2y + x^2 = 0)$.

$y^3 + 2y - y = 0$.

$y^3 + y = 0$.

$y(y^2 + 1) = 0$.

$y = 0$.

мы уже доказали что в таком случае не будет ~~корен~~ решений

не подх.

$y^2 + 1 = 0$

$y^2 = -1$.

нет корней в действит. числах, а по условию x и y – ~~действ~~ числа

не подх.

Значит $xy = 1$, ч.и.т.д

③ Все девушки либо брюнетки, либо шатенки, либо блондинки.

В таком случае, серьезные девушки скажут „да" в ответ на 3 вопроса лишь один раз (на тот вопрос, который соответствует их цвету волос).

А игривые скажут „да" ровно два раза (на вопросы, которые не соответствуют их цвету волос) и „нет" один раз (на тот вопрос, который об их настоящем цвете волос).

Всего „да" прозвучало $65+45+30=140$ раз

Пусть x – кол-во серьезных девушек, а y – кол-во игривых.

Тогда кол-во „да" от серьезных $1 \cdot x = x$.
кол-во „да" от игривых $2 \cdot y = 2y$

Значит $\boxed{x+2y=140}$

По условию задачи. Всего 100 девушек, а значит $\boxed{x+y=100}$

Решаем систему уравнений.

$$\begin{cases} x+2y=140 & ① \\ x+y=100. & ② \end{cases}$$

4б

① - ② : $y=40$

$$\begin{cases} y=40 \\ x+y=100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=40 \\ x=60. \end{cases}$$

Ответ: в группе 60 серьезных девушек.

⑤ $20x+19y=2021.$

Заметим, что $x=102$, $y=-1$ корни уравнения

$20\cdot 102+19\cdot(-1)=2040-19=2021.$

Предположим, что уравнение имеет другие целые корни, тогда

$x=102+ak$
$y=-1+bk$, где a, b, k - целые

$20x+19y=2021.$

ШИФР 11.33

стр. 8 из 13

$20x + 19y = 20 \cdot 102 + 19(-1).$

$20(x-102) + 19(y+1) = 0.$

$20((102+ak)-102) + 19((-1+bk)+1) = 0.$

$20(ak) + 19(bk) = 0.$

$k(20a + 19b) = 0.$

$k \neq 0$, т.к тогда корни совпадут с $(102; -1)$.

$20a + 19b = 0.$

$20a = -19b.$

Чтобы ~~не~~ не пропустить корни, нужна наименьшая периодичность x и y (где $x = 102 + ak$, $y = -1 + bk$), тогда, т.к 19 – простое число, то a и b – взаимно простые, то $\underline{a = -19}$, $\underline{b = 20}$

Тогда $\boxed{\begin{array}{l} x = 102 - 19k \\ y = -1 + 20k \end{array}}$

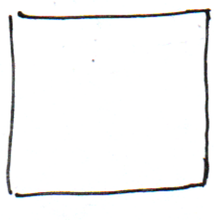
Например
$x = 102$, $y = ~~-1~~$
$x = 83$, $y = 19$
$x = 64$, $y = 39$
ч.т.д.

И действительно, при любом изменении k ~~на~~ $20x$ изменится на $380k$ (причем, если $\underline{k}$ – уменьш, то $20x$ – увелич на $380k$, если $\underline{k}$ – увелич, то $20x$ – уменьш на $380k$)

19y же при увеличении k ~~вверх~~ увеличится на $19\cdot 20k$ (~~380k~~ , а при уменьшении k уменьшится на $380k$ $\Rightarrow$ сумма $20x+19y$ будет оставаться постоянной и равной 2021.

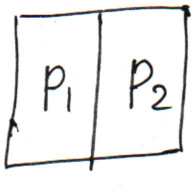
$$\boxed{\text{Ответ: } \begin{array}{l} x = 102 - 19k \\ y = -1 + 20k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}}$$

4) Нарисуем поле единичной площади



$S = 1.$

Вероятность каждого события занимает половину поля. ~~если не накладываются~~



$$\left.\begin{array}{l} P_1 = \frac{1}{2} \\ P_2 = \frac{1}{2} \\ P_3 = \frac{1}{2} \end{array}\right) \text{ по условию}$$

Если бы площади не перекрывались, то их сумма была бы:

$$S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Но площадь всего поля $S = 1$, тогда

$$\cancel{S - (S_1 + S_2 + S_3)}$$

$$(S_1 + S_2 + S_3) - S = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} -$$

общая площадь перекрытий (~~общая~~).

К примеру

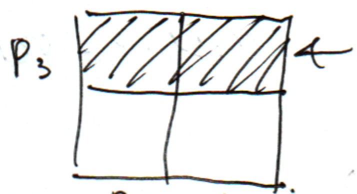


рис. 1

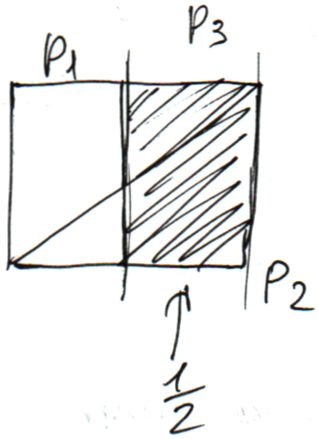


рис. 2

Предположим, что два каких-то вероятн. события не пересекаются (не перекрываются). Тогда 3е вероятность пересекает их и площади пересечений /перекрытий.

$$S_a + S_b = \frac{1}{2}$$ (к примеру рис. 1. рис. 2)

ШИФР ____________

~~В таком случае минимальн. Sa и S значение, если выбирать из Sa и Sb будет в том случае, если Sa = Sb. Тогда Ведь если одно из хоть чуть-чуть увеличить, а другое уменьшить, то значение хотя~~

$S_a + S_b = \frac{1}{2}$

- при $S_a = S_b = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$.
- при S_a (или S_b) $> \frac{1}{4}$, и S_b (или S_a) $< \frac{1}{4}$, получится, что ~~пересечение~~ вероятность пересечения ~~не меньше~~ каких-то двух событий не меньше большего из S_a или S_b, а так же нам нужно сводить ся к миним. знач., то такой вариант не подходит. $\left| S_a, S_b \geq \frac{1}{4} \right|$.

Если же 1ое событие пересек со 2ым, 2ое с 3им, 3ее с 1ым, то есть все события пересекаются, то всего пересечений — 3, а их суммарная площадь $\frac{1}{2}$.

$$\boxed{S_a + S_b + S_c = \frac{1}{2}} \quad (*)$$

Не учтено пересечение сразу 3 событий

Предположим, что все пересечения (то есть, каждое из них) будут меньше $\frac{1}{6}$, тогда.

$$\left.\begin{aligned} S_a &< \frac{1}{6} \\ S_b &< \frac{1}{6} \\ S_c &< \frac{1}{6} \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_a + S_b + S_c < \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

$$\boxed{S_a + S_b + S_c < \frac{1}{2}} \quad (**)$$

В таком случае, ~~каждое~~

$(**)$ противоречит $(*)$ $\Rightarrow$ значит, наше предположение – неверно $\Rightarrow$

~~каждое из S больше $\frac{1}{6}$ или ра~~

каждое из S_a, S_b, S_c – либо $> \frac{1}{6}$ либо $= \frac{1}{6}$

(при $S_a, S_b, S_c = \frac{1}{6}$ выполняется, т.к $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$).

Значит, мы доказали, что как минимум одно пересечение больше или равно $\frac{1}{6}$, а это как раз и будет означать, что найдутся такие два события, ШИФР ____________

~~верор~~

вероятност ~~которых~~ пересечения которых $\geq \frac{1}{6}$, тоесть, не меньше $\frac{1}{6}$,

ч.и.т.д.