УДК 514
ББК 22.1

С98 Нестандартные задачи по геометрии: учеб. пособие / А.И. Сюсюкалов, Е.А. Сюсюкалова; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2021. – 44 с.

Содержит цикл олимпиадных задач по геометрии.

Представлены нестандартные задачи по планиметрии и стереометрии.

Ил. 19. Библиогр.: 17 назв.

Планиметрия, стереометрия, контрпримеры.

Печатается по решению редакционно-издательского совета ФГБОУ ВО «Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина».

Рецензент: кафедра высшей математики ФГБОУ ВО «Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина» (канд. физ.-мат. наук С.А. Нелюхин)

Предисловие

Настоящее пособие рекомендуется учащимся старших классов, студентам 1 и 2 курсов, готовящимся к участию в олимпиадах, а также преподавателям физико-математических классов.

Авторы стремились уделить больше внимания нестандартным задачам по геометрии. Олимпиадные задачи по геометрии не требуют громоздких вычислений: как правило, при их решении используются дополнительные построения и геометрические преобразования.

Как показывают результаты олимпиад и ЕГЭ, задачи по геометрии вызывают значительные трудности у многих учащихся.

Данный сборник задач является дополнением к ранее изданным пособиям [10-13], в которых геометрические задачи рассматривались только эпизодически для демонстрации специальных олимпиадных методов и принципов.

Настоящий сборник, как и пособия [10-13], может быть использован для подготовки к ЕГЭ профильного уровня.

При составлении сборника использовались материалы из книг, указанных в библиографическом списке.

Пособие отражает опыт проведения занятий с учащимися – призерами олимпиад в лицее № 52 в течение последних десяти лет.

Авторы выражают благодарность заведующему кафедрой высшей математики РГРТУ кандидату физико-математических наук, доценту Бухенскому К.В. за поддержку издания данного пособия, а также доценту Нелюхину С.А. за полезные обсуждения задач и замечания.

§ 1.Планиметрия

1.1. Условия задач

1. На стороне OA угла AOB отложены отрезки OC и OK ($|OK| > |OC|$), а на стороне OB – соответственно равные им отрезки OD и OM. Пусть H – точка пересечения прямых CM и DK. Докажите, что точка H лежит на биссектрисе угла AOB.

2. Докажите, что если основание, угол при основании и сумма боковых сторон одного треугольника соответственно равны основанию, углу при основании и сумме боковых сторон другого треугольника, то эти треугольники равны.

3. На одной стороне угла с вершиной O отложены равные отрезки $OA = AB = BC$, а на другой стороне – равные отрезки $OD = DE = EF$. Докажите, что треугольники AEC и DBF равновелики.

4. В окружность с центром O вписан $\triangle ABC$. AD – биссектриса угла A. Пусть O_1 – центр окружности, описанной около треугольника ABD, O_2 – около $\triangle ACD$. Докажите, что AO – биссектриса угла O_1AO_2.

5. Через вершины A и C прямоугольника $ABCD$ проведена дуга окружности, целиком лежащая внутри прямоугольника. Проведите прямую, параллельную AB, пересекающую BC в точке P, AD – в точке Q, а дугу AC – в точке R так, чтобы сумма площадей фигур AQR и CRP была минимальной.

6. Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка K; из вершин A, B, C и D опускаются перпендикуляры на прямые BK, CK, DK и AK соответственно. Докажите, что эти перпендикуляры пересекаются в одной точке.

7. Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке A. Через точку B внутренней окружности, отличную от A, проведена касательная к этой окружности,

пересекающая внешнюю окружность в точках C и D. Докажите, что AB – биссектриса угла CAD.

8. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $ABFG$ и $BCDK$. Докажите, что продолжение медианы BE треугольника ABC является высотой в треугольнике BFK.

9. Четыре окружности размещены так, что каждая внешним образом касается двух других. Докажите, что точки касания лежат на одной окружности.

10. На плоскости даны треугольник ABC и окружность с радиусом $R/2$, где R – радиус описанной около треугольника ABC окружности. Докажите, что найдется такая точка T, для которой отрезки TA, TB, TC делятся окружностью пополам.

11. Среди всех треугольников, содержащихся в данном треугольнике, найдите треугольник с наибольшим отношением площади к периметру.

12. Три окружности с радиусами 1, 2 и 3 попарно касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через три точки попарного касания данных окружностей.

13. O – произвольная точка медианы AA_1 треугольника ABC. Прямая BO пересекает сторону AC в точке B_1, а прямая CO пересекает сторону AB в точке C_1. Докажите, что прямые B_1C_1 и BC параллельны.

14. В трапецию с основаниями 1 и 3 вписан круг. Какое наибольшее значение может иметь угол между боковыми сторонами этой трапеции?

15. Три окружности с одинаковым радиусом пересекаются в одной точке. Докажите, что три другие точки пересечения лежат на окружности с тем же радиусом.

16. Даны окружность K и точки P и Q вне ее. Из точки P проводят секущую PAB к окружности K. Через точки A, B и Q проводят окружности. Докажите, что все эти окружности